自然数 1, 2, 3, $\cdots$, n のうち，n と互いに素であるものの個数を $f(n)$ とする．

(1) 自然数 a, b, c および相異なる素数 p, q, r に対して，等式

$$f(p^aq^br^c) = p^{a-1}q^{b-1}r^{c-1}(p-1)(q-1)(r-1)$$

が成り立つことを示せ．

(2) $f(n)$ が n の約数となる 5 以上 100 以下の自然数 n をすべて求めよ．

(24 大阪大 理系 5)

【答】

(1) 略
(2) $n = 6,\ 8,\ 12,\ 16,\ 18,\ 24,\ 32,\ 36,\ 48,\ 54,\ 64,\ 72,\ 96$

【解答】

(1) $p^aq^br^c$ 以下の自然数の集合を U，U の部分集合で相異なる素数 p, q, r の倍数の集合をそれぞれ P, Q, R とおく．集合 X の要素の個数を $n(X)$ と表すと，$p^aq^br^c$ と互いに素であるものの個数 $f(p^aq^br^c)$ は

$$\begin{aligned} f(p^aq^br^c) &= n(\overline{P} \cap \overline{Q} \cap \overline{R}) = n(\overline{P \cup Q \cup R}) \\ &= n(U) - n(P \cup Q \cup R) \\ &= n(U) - \{n(P) + n(Q) + n(Q) \\ &\qquad\qquad - n(P \cap Q) - n(Q \cap R) - n(R \cap P) + n(P \cap Q \cap R)\} \end{aligned}$$

となる．ここで

$$n(P) = \frac{p^aq^br^c}{p} = p^{a-1}q^br^c$$

同じく

$$\begin{aligned} &n(Q) = p^aq^{b-1}r^c, \quad n(R) = p^aq^br^{c-1}, \\ &n(P \cap Q) = p^{a-1}q^{b-1}r^c, \quad n(Q \cap R) = p^aq^{b-1}r^{c-1}, \quad n(R \cap Q) = p^{a-1}q^br^{c-1}, \\ &n(P \cap Q \cap R) = p^{a-1}q^{b-1}r^{c-1} \end{aligned}$$

であるから

$$\begin{aligned} f(p^aq^br^c) &= p^aq^br^c - \{p^{a-1}q^br^c + p^aq^{b-1}r^c + p^aq^br^{c-1} \\ &\qquad\qquad - p^{a-1}q^{b-1}r^c - p^aq^{b-1}r^{c-1} - p^{a-1}q^br^{c-1} + p^{a-1}q^{b-1}r^{c-1}\} \\ &= p^{a-1}q^{b-1}r^{c-1}(pqr - qr - pr - pq + r + p + q - 1) \\ &= p^{a-1}q^{b-1}r^{c-1}\{(qr - r - q + 1)p - qr + r + q - 1\} \\ &= p^{a-1}q^{b-1}r^{c-1}(p-1)(qr - r - q + 1) \\ &= p^{a-1}q^{b-1}r^{c-1}(p-1)(q-1)(r-1) \end{aligned}$$

が成り立つ．　　　　$\cdots\cdots$ (証明終わり)

(2) $5 \leqq n \leqq 100$ を満たす自然数 n について異なる素因数の個数により場合分けして

「$f(n)$ が n の約数となる」　　$\cdots\cdots$ $(*)$

ような n を求める．

(i) $n=p^a$ (p は素数, a は自然数) のとき
$f(n)=p^{a-1}(p-1)$ であるから

$$(*) \iff \frac{n}{f(n)}\text{は整数である} \iff \frac{p}{p-1}\text{は整数である}$$

$p-1$ は素数 p の約数であるから

$$p-1=1 \qquad \therefore \quad p=2$$

$n=2^a$ で $5 \leqq n \leqq 100$ を満たすものは

$$n=8,\ 16,\ 32,\ 64$$

である.

(ii) $n=p^aq^b$ ($p,\ q$ は $p<q$ を満たす素数, $a,\ b$ は自然数) のとき
$f(n)=p^{a-1}q^{b-1}(p-1)(q-1)$ であるから

$$(*) \iff \frac{n}{f(n)}\text{は整数である} \iff \frac{pq}{(p-1)(q-1)}\text{は整数である}$$

$p-1,\ q-1$ は $p-1<q-1$ を満たす素数の積 pq の約数であるから

$$\begin{cases} p-1=1 \\ q-1=p \end{cases} \qquad \therefore \quad p=2,\ q=3$$

$n=2^a3^b$ で $5 \leqq n \leqq 100$ を満たすものは

$$n=6(=2\cdot 3),\ 12,\ 24,\ 48,\ 96,\ 18(=2\cdot 3^2),\ 36,\ 72,\ 54(=2\cdot 3^3)$$

である.

(iii) $n=p^aq^br^c$ ($p,\ q,\ r$ は $p<q<r$ を満たす素数, $a,\ b,\ c$ は自然数) のとき
$f(n)=p^{a-1}q^{b-1}r^{c-1}(p-1)(q-1)(r-1)$ であるから

$$(*) \iff \frac{n}{f(n)}\text{は整数である} \iff \frac{pqr}{(p-1)(q-1)(r-1)}\text{は整数である}$$

$p-1,\ q-1,\ r-1$ は $p-1<q-1<r-1$ を満たす素数の積 pqr の約数であるから

$$\begin{cases} p-1=1 \\ q-1=p \\ r-1=q \end{cases} \qquad \therefore \quad p=2,\ q=3,\ r=4$$

である. これは r が素数であることに反する.

(iv) $n \geqq p^aq^br^cs^d$ ($p,\ q,\ r,\ s$ は $p<q<r<s$ を満たす素数, $a,\ b,\ c,\ d$ は自然数) のとき

$$n \geqq 2\cdot 3\cdot 5\cdot 7=210$$

これは $5 \leqq n \leqq 100$ に反する.

以上 (i)〜(iv) より, $(*)$ を満たす自然数 n は

$$\boldsymbol{n=6,\ 8,\ 12,\ 16,\ 18,\ 24,\ 32,\ 36,\ 48,\ 54,\ 64,\ 72,\ 96} \qquad \cdots\cdots(答)$$

である.