

次の等式を満たす正の整数 x, y の組をすべて求めよ。ただし、 $x \leq y$ である。

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{7}{12}$$

(24 青森公立大 1(2))

【答】 $(x, y) = (2, 12), (3, 4)$

【解答】

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{7}{12} \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

x, y は正の整数であり、 x, y はどちらも 0 でないから

$$\textcircled{1} \iff 12(y+x) = 7xy$$

x について整理すると

$$(7y-12)x - 12y = 0$$

$$(7y-12)x - \frac{12}{7}(7y-12) = \frac{12^2}{7}$$

$$(7x-12)(7y-12) = 12^2 (= 2^4 \cdot 3^2) \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

x, y は正の整数であり、 $x \leq y$ であるから

$$-5 \leq 7x-12 \leq 7y-12$$

であり、 $\textcircled{2}$ を満たす整数の組み合わせは

$7x-12$	1	2	3	4	6	8	9	12
$7y-12$	144	72	48	36	24	18	16	12

である。上段の x について整数となるものに絞り、整数となる x について y の値を求めると

x	$\frac{13}{7}$	2	$\frac{15}{7}$	$\frac{16}{7}$	$\frac{18}{7}$	$\frac{20}{7}$	3	$\frac{24}{7}$
y		12					4	

となる。よって、求める x, y の組は

$$(x, y) = (2, 12), (3, 4)$$

……(答)

である。

- 上の解法では無駄な計算が多い。絞り込みを考えてみる。

x, y は $1 \leq x \leq y$ を満たす整数であるから、 $\textcircled{1}$ より

$$\frac{7}{12} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} \leq \frac{1}{x} + \frac{1}{x} = \frac{2}{x}$$

$$\therefore x \leq \frac{24}{7} \quad \therefore x = 1, 2, 3$$

である。

(i) $x = 1$ のとき

$$\frac{1}{y} = \frac{7}{12} - \frac{1}{1} = -\frac{5}{12} \quad \therefore y = -\frac{12}{5} \quad \text{不適.}$$

(ii) $x = 2$ のとき

$$\frac{1}{y} = \frac{7}{12} - \frac{1}{2} = \frac{1}{12} \quad \therefore y = 12 \quad \text{適する.}$$

(iii) $x = 3$ のとき

$$\frac{1}{y} = \frac{7}{12} - \frac{1}{3} = \frac{3}{12} = \frac{1}{4} \quad \therefore y = 4 \quad \text{適する.}$$

(i), (ii), (iii) より、求める x, y の組は

$$(x, y) = (2, 12), (3, 4)$$

である。