$|x| \leqq 2$ を満たす複素数 x と，$|y-(8+6i)|=3$ を満たす複素数 y に対して，$z=\dfrac{x+y}{2}$ とする．このような複素数 z が複素数平面において動く領域を図示し，その面積を求めよ．

(24 京都大 理系 2)

【答】 図略，6π

【解答】

$$|x| \leqq 2 \qquad \cdots\cdots ①$$

$$|y-(8+6i)|=3 \qquad \cdots\cdots ②$$

$$z=\frac{x+y}{2} \qquad \cdots\cdots ③$$

z が動く領域は「① かつ ② かつ ③」を満たす複素数 x, y が存在するような z の領域である．

$$「① かつ ② かつ ③」\iff \begin{cases} x=2z-y & \cdots\cdots ③' \\ |2z-y| \leqq 2 & \cdots\cdots ④ \\ |y-(8+6i)|=3 & \cdots\cdots ② \end{cases}$$

であり

$$\begin{cases} |y-2z| \leqq 2 & \cdots\cdots ④ \\ |y-(8+6i)|=3 & \cdots\cdots ② \end{cases}$$

を満たす複素数 y が存在するような z の領域を求めればよい．④は $2z$ を中心とする半径 2 の円の周および内部，② は点 $8+6i$ を中心とする半径 3 の円を表しているから，z の条件は

(半径の差) $\leqq$ (中心間の距離) $\leqq$ (半径の和)

である．すなわち

$$(3-2) \leqq |2z-(8+6i)| \leqq 3+2$$

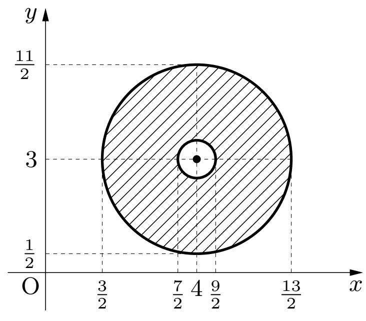
$$\therefore \quad \frac{1}{2} \leqq |z-(4+3i)| \leqq \frac{5}{2}$$

である．点 z は右図の斜線部分を動く．境界も含む．

この斜線部分の面積は

$$\pi\left(\frac{5}{2}\right)^2-\pi\left(\frac{1}{2}\right)^2=\boldsymbol{6\pi} \qquad \cdots\cdots(答)$$

である．



- ③ より，z は x と y を結ぶ線分の中点である．
  y を固定して x を動かすとき，z は y を中心に $\dfrac{1}{2}$ 倍した図形を描く．x は原点を中心とする半径 2 の円の周および内部を動くから，z は原点 O と y を結ぶ線分の中点を中心とする半径 1 の円の周および内部 D_y を動く (図 1)．
  ついで，y を動かす．y は $8+6i$ を中心とする半径 3 の円周上を動くから，原点 O と y を結ぶ線分の中点は $4+3i$ を中心とする半径 $\dfrac{3}{2}$ の円 C を描く (図 2)．
  この円 C 上の点を中心として半径 1 の円の周および内部の円板 D_y を動かすと z の領域が得られる (図 3)．
  以下，解答と同じ．

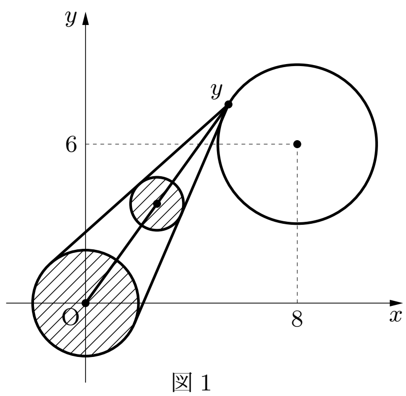


図 1

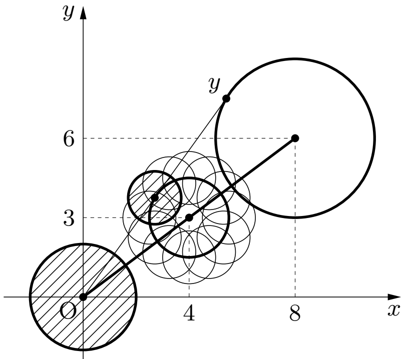


図 2

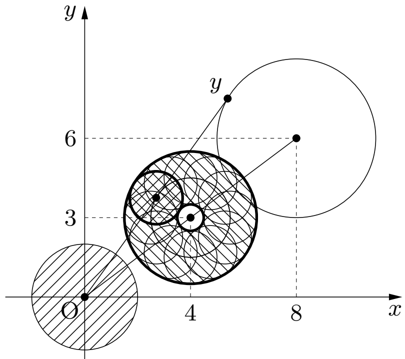


図 3

- ①, ② を満たす x, y は極形式で

$$x = r(\cos\theta + i\sin\theta) \quad (0 \leqq r \leqq 2,\ 0 \leqq \theta < 2\pi)$$
$$y = 8 + 6i + 3(\cos\varphi + i\sin\varphi) \quad (0 \leqq \varphi < 2\pi)$$

と表すことができる．したがって

$$\begin{aligned} z &= \frac{x+y}{2} \\ &= \frac{r}{2}(\cos\theta + i\sin\theta) + 4 + 3i + \frac{3}{2}(\cos\varphi + i\sin\varphi) \end{aligned}$$

φ を固定して，r と θ を動かすと，z は $4+3i+\dfrac{3}{2}(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ を中心とする半径 1 の円の周および内部を動く (下左図).

φ を動かすと，$4+3i+\dfrac{3}{2}(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ は $4+3i$ を中心とする半径 $\dfrac{3}{2}$ の円を描くから，z の描く図形は下右図の斜線部分となる．

以下，解答と同じ．