方程式 $z^3+1=0$ を満たす複素数を偏角の小さい順に z_1，z_2，z_3 とするとき，$\displaystyle\sum_{k=1}^{2024}\left(\frac{z_1z_2}{z_3}\right)^k$ を求めなさい．ただし，z_1，z_2，z_3 の偏角は 0 以上 2π 未満とする．

(24 公立千歳科技大 中期 理工 1(7))

【答】 $-\sqrt{3}i$

【解答】

$z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$ $(r>0,\ 0\leqq\theta<2\pi)$ とおくと

$$
\begin{aligned}
&z^3+1=0\\
\iff& r^3(\cos 3\theta+i\sin 3\theta)=\cos\pi+i\sin\pi\\
\iff& \begin{cases} r^3=1\\ 3\theta=\pi,\ 3\pi,\ 5\pi\end{cases}\\
\therefore\ & \begin{cases} r=1\\ \theta=\dfrac{\pi}{3},\ \pi,\ \dfrac{5\pi}{3}\end{cases}
\end{aligned}
$$

$\arg z_1<\arg z_2<\arg z_3$ より

$$
\begin{aligned}
z_1&=\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3},\\
z_2&=\cos\pi+i\sin\pi,\\
z_3&=\cos\frac{5\pi}{3}+i\sin\frac{5\pi}{3}
\end{aligned}
$$

であり

$$
\begin{aligned}
&\left|\frac{z_1z_2}{z_3}\right|=\frac{|z_1||z_2|}{|z_3|}=\frac{1\cdot 1}{1}=1,\\
&\arg\frac{z_1z_2}{z_3}=\arg\left(\frac{\pi}{3}+\pi-\frac{5\pi}{3}\right)=\arg\left(-\frac{\pi}{3}\right)
\end{aligned}
$$

であるから

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{2024}\left(\frac{z_1z_2}{z_3}\right)^k&=\sum_{k=1}^{2024}\left\{\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right\}^k\\
&=\sum_{k=1}^{2024}\left\{\cos\left(-\frac{k\pi}{3}\right)+i\sin\left(-\frac{k\pi}{3}\right)\right\}
\end{aligned}
$$

$\cos\left(-\dfrac{k\pi}{3}\right)+i\sin\left(-\dfrac{k\pi}{3}\right)$ は周期 6 で

$$
\sum_{k=1}^{6}\left\{\cos\left(-\frac{k\pi}{3}\right)+i\sin\left(-\frac{k\pi}{3}\right)\right\}=0
$$

である．$2024=6\times 337+2$ であるから

$$
\begin{aligned}
&\sum_{k=1}^{2024}\left(\frac{z_1z_2}{z_3}\right)^k\\
&=0\times 337+\left\{\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right\}+\left\{\cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right)+i\sin\left(-\frac{2\pi}{3}\right)\right\}\\
&=-2i\sin\frac{\pi}{3}\\
&=\boldsymbol{-\sqrt{3}i} \qquad\cdots\cdots(答)
\end{aligned}
$$

である．