u を実数とするとき，複素数 $z=\dfrac{1}{1+iu}$ が複素数平面上に作る曲線に原点を付け加えた図形で囲まれた部分の面積 S を求めなさい．ただし，$i=\sqrt{-1}$ である．解答欄には計算過程も書きなさい．

(24 公立千歳科技大 理工 2)

【答】 $\dfrac{\pi}{4}$

【解答】

$$z=\frac{1}{1+iu} \iff 1+iu=\frac{1}{z}$$

$$\therefore \quad u=\frac{1}{i}\left(\frac{1}{z}-1\right)$$

u は実数であるから $u-\overline{u}=0$ が成り立つ．

$$\frac{1}{i}\left(\frac{1}{z}-1\right)-\frac{1}{-i}\left(\frac{1}{\overline{z}}-1\right)=0$$

$$\iff \frac{1}{z}+\frac{1}{\overline{z}}=2$$

$$\iff (*)\begin{cases}\overline{z}+z=2z\overline{z}\\ z\neq 0\end{cases}$$

第 1 式は

$$z\overline{z}-\frac{\overline{z}}{2}-\frac{z}{2}=0$$

$$\therefore \quad \left|z-\frac{1}{2}\right|^2=\left(\frac{1}{2}\right)^2$$

$$\therefore \quad \left|z-\frac{1}{2}\right|=\frac{1}{2}$$

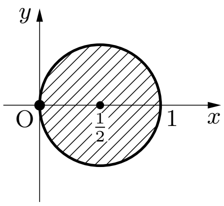
となるから，$(*)$ は

$$\begin{cases}\left|z-\dfrac{1}{2}\right|=\dfrac{1}{2}\\ z\neq 0\end{cases}$$

である．

よって，z が複素数平面上に作る曲線に原点を付け加えた図形は，点 $\dfrac{1}{2}$ を中心とする半径 $\dfrac{1}{2}$ の円であり，求める面積は

$$\pi\left(\frac{1}{2}\right)^2=\boldsymbol{\frac{\pi}{4}} \qquad \cdots\cdots(答)$$



である．