3 つの複素数の組 $(z_1,\ z_2,\ z_3)$ が $z_1z_2z_3 \neq 0$ および次の ① から ③ をみたすとする.

$$z_1 = z_2 + \overline{z_3} \quad \cdots\cdots ①,\quad z_2 = \overline{z_1}z_3 \quad \cdots\cdots ②,\quad z_3 = \frac{z_1}{z_2} \quad \cdots\cdots ③$$

ただし，$\overline{z_1}$, $\overline{z_3}$ はそれぞれ z_1, z_3 の共役複素数を表す.

(1) ② と ③ を用いて，z_2 が実数であることを示せ.
(2) z_1 が実数である $(z_1,\ z_2,\ z_3)$ の組をすべて求めよ.
(3) z_1 が実数でない $(z_1,\ z_2,\ z_3)$ の組をすべて求めよ.

(24 北海道大 後 理・工 3)

【答】

(1) 略

(2) $(z_1,\ z_2,\ z_3) = \left(-\frac{1}{2},\ \frac{1}{2},\ -1\right)$

(3) $(z_1,\ z_2,\ z_3) = \left(-\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i,\ -1,\ \frac{1}{2} \mp \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$

【解答】

$$z_1z_2z_3 \neq 0,\quad z_1 = z_2 + \overline{z_3} \quad \cdots\cdots ①,\quad z_2 = \overline{z_1}z_3 \quad \cdots\cdots ②,\quad z_3 = \frac{z_1}{z_2} \quad \cdots\cdots ③$$

(1) ② かつ ③ を変形すると

$$「②かつ③」 \iff \begin{cases} z_3 = \dfrac{z_1}{z_2} \\ z_2 = \overline{z_1} \cdot \dfrac{z_1}{z_2} \end{cases} \iff \begin{cases} z_3 = \dfrac{z_1}{z_2} \\ {z_2}^2 = |z_1|^2 \end{cases}$$

第 2 式より

$$z_2 = \pm|z_1| \quad \cdots\cdots ④$$

であり，z_2 は実数である. ……(証明終わり)

(2) 「①かつ②かつ③」を変形すると

$$\begin{aligned} &「①かつ②かつ③」 \\ \iff &「①かつ③かつ④」 \\ \iff &\begin{cases} z_3 = \dfrac{z_1}{z_2} \\ z_2 = \pm|z_1| \\ z_1 = \pm|z_1| + \dfrac{\overline{z_1}}{z_2} \end{cases} \qquad \text{(以下，複号同順)} \\ \iff &\begin{cases} z_3 = \dfrac{z_1}{z_2} \\ z_2 = \pm|z_1| \\ z_1 = \pm\left(|z_1| + \dfrac{\overline{z_1}}{|z_1|}\right) \quad (\because\ ④) \end{cases} \\ \iff &\begin{cases} z_3 = \dfrac{z_1}{z_2} \\ z_2 = \pm|z_1| \\ z_1|z_1| = \pm\left(|z_1|^2 + \overline{z_1}\right) \quad (\because\ z_1 \neq 0) \quad \cdots\cdots ⑤ \end{cases} \end{aligned}$$

$z_1 = p + qi$ (p, q は実数) とおくと

$$\begin{aligned} ⑤ \iff &(p+qi)\sqrt{p^2+q^2} = \pm(p^2+q^2+p-qi) \\ \iff &\begin{cases} p\sqrt{p^2+q^2} = \pm(p^2+q^2+p) \\ q\sqrt{p^2+q^2} = \mp q \end{cases} \end{aligned}$$

である.

z_1 が実数のとき，$q=0$ であり

$$
\begin{aligned}
⑤ &\iff p|p| = \pm(p^2+p) \\
&\iff |p| = \pm(p+1) \quad (\because\ z_1 \fallingdotseq 0 \text{ より } p \fallingdotseq 0)
\end{aligned}
$$

(i) $p>0$ のとき

$$⑤ \iff p=p+1 \text{ または } p=-p-1$$

第 1 式は解なし．第 2 式より $p=-\dfrac{1}{2}$ を得るが，(i) に反する．

(ii) $p<0$ のとき

$$⑤ \iff -p=p+1 \text{ または } -p=-p-1$$

第 1 式より $p=-\dfrac{1}{2}$ を得る．これは (ii) を満たす．第 2 式は解なし．

このとき，複号の順序に注意すると $z_2=+|z_1|$ であるから

$$\boldsymbol{(z_1,\ z_2,\ z_3)=\left(-\frac{1}{2},\ \frac{1}{2},\ -1\right)} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

である．

(3) $z_1=p+qi$ が実数でないとき，$q \fallingdotseq 0$ であり

$$
\begin{aligned}
⑤ &\iff \begin{cases} p\sqrt{p^2+q^2}=\pm(p^2+q^2+p) \\ \sqrt{p^2+q^2}=\mp 1 \quad (\text{ここで}\sqrt{p^2+q^2}=-1 \text{ は不合理}) \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} p^2+q^2=1 \\ p=-(1+p) \end{cases}
\end{aligned}
$$

$$\therefore\quad p=-\frac{1}{2},\quad q=\pm\frac{\sqrt{3}}{2} \qquad \therefore\quad z_1=-\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}i$$

このとき，複号の順序に注意すると $z_2=-|z_1|$ であるから

$$\boldsymbol{(z_1,\ z_2,\ z_3)=\left(-\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}i,\ -1,\ \frac{1}{2}\mp\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

である．