$\alpha,\ \beta$ を複素数とし，複素数 z に対して

$$f(z)=z^2+\alpha z+\beta$$

とおく．$\alpha,\ \beta$ は

$$|f(1)-3|\leqq 1 \text{ かつ } |f(i)-1|\leqq 3$$

を満たしながら動く．ただし，i は虚数単位である．

(1) $f(1+i)$ がとりうる値の範囲を求め，複素数平面上に図示せよ．

(2) $f(1+i)=0$ であるとき，$\alpha,\ \beta$ の値を求めよ．

(24 大阪大 理系 2)

【答】

(1) $|f(1+i)-2(1+i)|\leqq 2\sqrt{2}$，図は略．

(2) $\alpha=-2+i,\ \beta=3-i$

【解答】

$$f(z)=z^2+\alpha z+\beta$$

$$|f(1)-3|\leqq 1 \text{ かつ } |f(i)-1|\leqq 3 \iff \begin{cases}|\alpha+\beta-2|\leqq 1 & \cdots\cdots ①\\ |\alpha i+\beta-2|\leqq 3 & \cdots\cdots ②\end{cases}$$

(1) $f(1+i)=\gamma$ とおくと

$$(1+i)^2+\alpha(1+i)+\beta=\gamma$$

$$\therefore\quad \gamma=\alpha(1+i)+\beta+2i \qquad \cdots\cdots ③$$

である．γ のとりうる値の範囲は,「①かつ②かつ③」を満たす $\alpha,\ \beta$ が存在するような γ の満たす条件が表す領域である．

「①かつ②かつ③」

$$\iff \begin{cases}\beta=\gamma-\alpha(1+i)-2i\\ |\alpha+\{\gamma-\alpha(1+i)-2i\}-2|\leqq 1\\ |\alpha i+\{\gamma-\alpha(1+i)-2i\}-2|\leqq 3\end{cases}$$

$$\iff \begin{cases}\beta=\gamma-\alpha(1+i)-2i\\ |-\alpha i+\gamma-2i-2|\leqq 1\\ |-\alpha+\gamma-2i-2|\leqq 3\end{cases}$$

$$\iff \begin{cases}\beta=\gamma-\alpha(1+i)-2i & \cdots\cdots ③'\\ |\alpha+\gamma i+2-2i|\leqq 1 & \cdots\cdots ④\\ |\alpha-\gamma+2i+2|\leqq 3 & \cdots\cdots ⑤\end{cases}$$

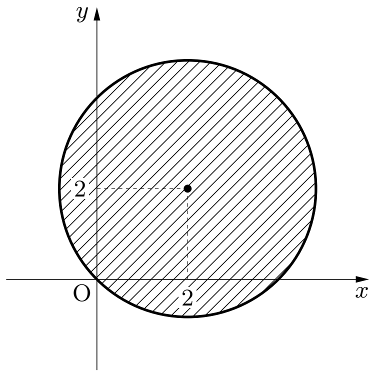
であり,「④かつ⑤」を満たす α が存在するような γ の条件を求めればよい．

α は

④より，点 $-\gamma i-2+2i$ を中心とする半径 1 の円の周および内部，

⑤より，点 $\gamma-2i-2$ を中心とする半径 3 の円の周および内部

を動くから，α が存在するための γ の条件は，この 2 円が共有点をもつこと，すなわち



$$(\text{中心間の距離}) \leqq (\text{半径の和})$$
$$\therefore\quad |(-\gamma i-2+2i)-(\gamma-2i-2)| \leqq 1+3$$
$$|-(1+i)\gamma+4i| \leqq 4$$
$$|-(1+i)|\left|\gamma-\frac{4i}{1+i}\right| \leqq 4$$
$$\sqrt{2}\left|\gamma-\frac{4i(1-i)}{2}\right| \leqq 4$$
$$\therefore\quad \boldsymbol{|\gamma-2(1+i)| \leqq 2\sqrt{2}} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

である．

これを複素数平面上に図示すると右図の斜線部分となる．境界も含む．

(2) $f(1+i)=0$ であるとき，$\gamma=0$ であり,「④かつ⑤」を満たす α は

$$\begin{cases}|\alpha+2-2i| \leqq 1\\ |\alpha+2i+2| \leqq 3\end{cases}$$

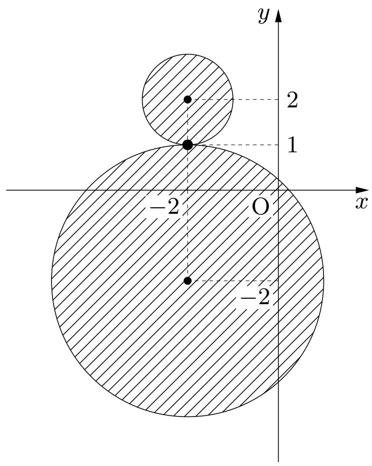
の解であり，右図より

$$\boldsymbol{\alpha=-2+i} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

である．このとき ③$'$ より

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\beta}&=0-(-2+i)(1+i)-2i\\ &=\boldsymbol{3-i}\end{aligned} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

である．



- (1) ①, ② において

$$\begin{cases}u=\alpha+\beta-2\\ v=\alpha i+\beta-2\end{cases}$$

とおくと

$$\text{「①かつ②」} \iff |u| \leqq 1 \text{ かつ } |v| \leqq 3 \qquad \cdots\cdots ㋐$$

であり

$$\begin{cases}\alpha=\dfrac{u-v}{1-i}\\ \beta=2+\dfrac{u+vi}{1+i}\end{cases}$$

$$\therefore\quad \begin{cases}\alpha=\dfrac{1+i}{2}(u-v)\\ \beta=2+\dfrac{1-i}{2}u+\dfrac{1+i}{2}v\end{cases} \qquad \cdots\cdots ㋑$$

である．$f(1+i)=\gamma$ とおくと

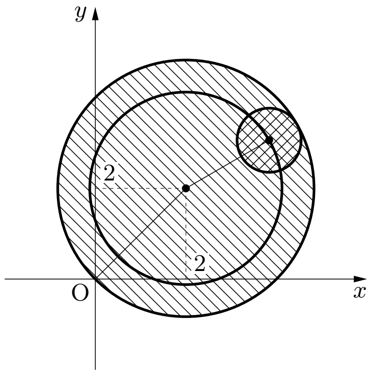
$$\begin{aligned}\gamma=f(1+i)&=\alpha(1+i)+\beta+2i\\ &=\frac{1+i}{2}(u-v)\cdot(1+i)+\left(2+\frac{1-i}{2}u+\frac{1+i}{2}v\right)+2i\\ &=i(u-v)+\frac{1-i}{2}u+\frac{1+i}{2}v+2+2i\\ &=\frac{1+i}{2}u+\frac{1-i}{2}v+2+2i\end{aligned}$$

v を固定する．㋐ より u は原点を中心とする半径 1 の円の周および内部を動くから，$\dfrac{1+i}{2}u=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\left(\cos\dfrac{\pi}{4}+i\sin\dfrac{\pi}{4}\right)u$ は原点を中心とする半径 $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ の円の周および内部を動く．したがって，γ は $\dfrac{1-i}{2}v+2+2i$ を中心とする半径 $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ の円の周および内部を動く．

v は ㋐ より原点を中心とする半径 3 の円の周および内部を動き，周上の点 v は

$$\begin{aligned}&\frac{1-i}{2}v+2+2i\\ =\;&\frac{\sqrt{2}}{2}\left\{\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right\}v+2+2i\end{aligned}$$

であり，$2+2i$ を中心とする半径 $\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$ の円周上を動く．



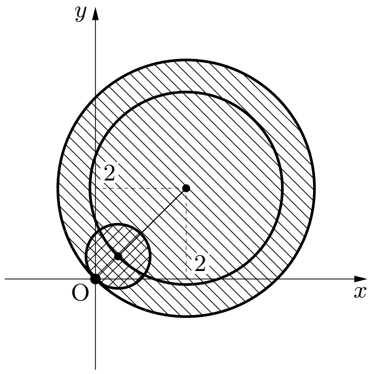
よって，γ は右図の斜線部分を動く．これは

$$|f(1+i)-2(1+i)|\leqq\frac{3\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\therefore\quad |f(1+i)-2(1+i)|\leqq 2\sqrt{2}$$

と表すことができる．

(2) $f(1+i)=0$ となるのは右図より



$$\begin{cases}\dfrac{1+i}{2}u=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\left(\cos\dfrac{5\pi}{4}+i\sin\dfrac{5\pi}{4}\right)\\[2mm] \dfrac{1-i}{2}v=\dfrac{3\sqrt{2}}{2}\left(\cos\dfrac{5\pi}{4}+i\sin\dfrac{5\pi}{4}\right)\end{cases}$$

$$\therefore\quad\begin{cases}\dfrac{1+i}{2}u=-\dfrac{1}{2}(1+i)\\[2mm] \dfrac{1-i}{2}v=-\dfrac{3}{2}(1+i)\end{cases}$$

$$\therefore\quad\begin{cases}u=-1\\ v=-\dfrac{3(1+i)}{1-i}=-3i\end{cases}$$

㋑ より

$$\alpha=\frac{1+i}{2}\{-1-(-3i)\}=\frac{-4+2i}{2}=-2+i$$

$$\beta=2+\frac{1-i}{2}\cdot(-1)+\frac{1+i}{2}\cdot(-3i)=2-\frac{1-i}{2}+\frac{3-3i}{2}=3-i$$

である．