n を自然数とし，i を虚数単位とする．$\alpha=\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{1}{2}i$ とし，その複素数平面上の点を $\mathrm{A}(\alpha)$ とおく．点 $\mathrm{A}(\alpha)$ を原点 O のまわりに $\dfrac{\pi}{3}$ だけ回転した点を $\mathrm{B}(\beta)$ とおく．また，点 $\mathrm{A}(\alpha)$，$\mathrm{B}(\beta)$ を原点 O のまわりに $\dfrac{\pi}{3}$ だけ回転した点をそれぞれ $\mathrm{A}_1(\alpha_1)$，$\mathrm{B}_1(\beta_1)$ とおく．さらに，$n\geqq 2$ に対して，点 $\mathrm{A}_{n-1}(\alpha_n-1)$，$\mathrm{B}_{n-1}(\beta_{n-1})$ を O のまわりに $\dfrac{\pi}{3}$ だけ回転した点をそれぞれ $\mathrm{A}_n(\alpha_n)$，$\mathrm{B}_n(\beta_n)$ とおく．$\triangle\mathrm{OA}_n\mathrm{B}_n$ の重心を $\mathrm{G}_n(\gamma_n)$ とおく．このとき，以下の問いに答えよ．

(1) 点 $\mathrm{B}(\beta)$ を表す複素数を求めよ．
(2) 点 $\mathrm{G}_n(\gamma_n)$ を表す複素数を求めよ．
(3) 2 点 $\mathrm{A}(\alpha)$，$\mathrm{G}_{100}(\gamma_{100})$ を結ぶ線分 AG_{100} を $3:1$ に外分する点を表す複素数を求めよ．
(4) $\triangle\mathrm{OA}_{100}\mathrm{B}_{100}$ に外接する円の方程式を求めよ．

(24 愛知県大 情報科学 1)

【答】

(1) $\beta=i$

(2) $\gamma_n=\dfrac{\sqrt{3}}{3}\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i\right)^{n+1}$

(3) $-i$

(4) $\left|z-\left(\dfrac{\sqrt{3}}{6}-\dfrac{1}{2}i\right)\right|=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

【解答】

(1) $$\alpha=\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i=\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}$$

$\mathrm{B}(\beta)$ は点 $\mathrm{A}(\alpha)$ を原点 O のまわりに $\dfrac{\pi}{3}$ だけ回転し点であるから

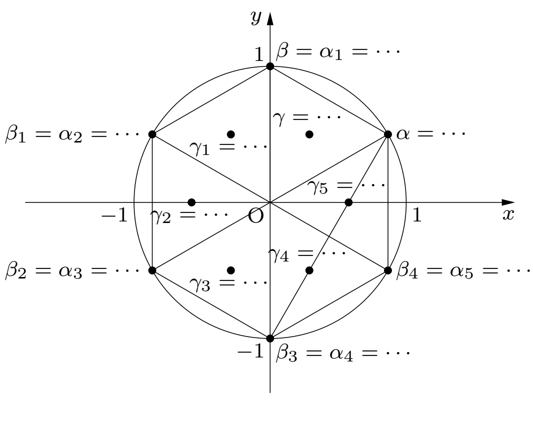
$$\begin{aligned}\beta&=\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)\alpha\\&=\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)\\&=\cos\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{6}\right)\\&=\boldsymbol{i}\end{aligned}$$
……(答)

である．

(2) $\triangle\mathrm{OAB}$ の重心を表す複素数を γ とおく．

$$\begin{aligned}\gamma&=\frac{1}{3}(0+\alpha+\beta)\\&=\frac{1}{3}\left\{0+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right)+i\right\}\\&=\frac{\sqrt{3}}{3}\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\\&=\frac{\sqrt{3}}{3}\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)\end{aligned}$$

である．$\mathrm{G}_n(\gamma_n)$ は $\triangle\mathrm{OA}_n\mathrm{B}_n$ の重心であり，γ を原点 O のまわりに $\dfrac{n\pi}{3}$ 回転して得られる点である．



$$
\begin{aligned}
\gamma_n &= \left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)^n \gamma \\
&= \frac{\sqrt{3}}{3}\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)^{n+1} \\
&= \boldsymbol{\frac{\sqrt{3}}{3}\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^{n+1}} \qquad \cdots\cdots(答)
\end{aligned}
$$

である．

(3) (2) の結果より

$$
\begin{aligned}
\gamma_{100} &= \frac{\sqrt{3}}{3}\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)^{101} \\
&= \frac{\sqrt{3}}{3}\left(\cos\frac{101\pi}{3} + i\sin\frac{101\pi}{3}\right) \quad (\because \text{ ド・モアブルの定理}) \\
&= \frac{\sqrt{3}}{3}\left(\cos\frac{5\pi}{3} + i\sin\frac{5\pi}{3}\right) \quad \left(\because \ \frac{101\pi}{3} = 2\pi\times 16 + \frac{5\pi}{3}\right) \\
&= \frac{\sqrt{3}}{6} - \frac{1}{2}i
\end{aligned}
$$

線分 AG_{100} を $3:1$ に外分する点を表す複素数は

$$
\frac{1}{3-1}\left\{-1\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right)+3\left(\frac{\sqrt{3}}{6}-\frac{1}{2}i\right)\right\} = \boldsymbol{-i} \qquad \cdots\cdots(答)
$$

となる．

- $\triangle\mathrm{OA}_{100}\mathrm{B}_{100}$ は $\triangle\mathrm{OA}_4\mathrm{B}_4$ と一致し，線分 AG_{100} は線分 AG_4 と一致する．A，G_5，G_4，A_4 のこの順に一直線上に並び，$\mathrm{AG}_5 = \mathrm{G}_5\mathrm{G}_4 = \mathrm{G}_4\mathrm{A}_4$ であるから，$\mathrm{A}_4(\alpha_4)$ が線分 AG_4 を $3:1$ に外分する点である．

(4) $\triangle\mathrm{OAB}$ は

$$
|\mathrm{OA}| = |\mathrm{OB}| = 1,\ \angle\mathrm{AOB} = \frac{\pi}{3}
$$

より正三角形であり，これを回転した $\triangle\mathrm{OA}_{100}\mathrm{B}_{100}$ も正三角形である．したがって，$\triangle\mathrm{OA}_{100}\mathrm{B}_{100}$ の外心は重心 γ_{100} と一致，半径は $|\gamma_{100}|$ である．(3) の計算から

$$
\gamma_{100} = \frac{\sqrt{3}}{6} - \frac{1}{2}i, \quad |\gamma_{100}| = \frac{\sqrt{3}}{3}
$$

である．よって，$\triangle\mathrm{OA}_{100}\mathrm{B}_{100}$ に外接する円の方程式は

$$
\boldsymbol{\left|z - \left(\frac{\sqrt{3}}{6} - \frac{1}{2}i\right)\right| = \frac{\sqrt{3}}{3}} \qquad \cdots\cdots(答)
$$

である．