x と y を $x>0,\ y \neq 0$ をみたす実数とする．複素数 $z=x+iy$ (ただし i は虚数単位である) が方程式 $z^3=\overline{z}^2$ の解 (ただし $\overline{z}$ は z と共役な複素数を表す) であるとき，x の値を求めよ．ただし答えは三角関数を用いずに表すこと．

(24 札幌医大 1(1))

【答】 $x=\dfrac{-1+\sqrt{5}}{4}$

【解答】

$z=x+iy\ (x>0,\ y \neq 0)$ は

$$z=r(\cos\theta+i\sin\theta)\ \left(r>0,\ -\frac{\pi}{2}<\theta<\frac{\pi}{2},\ \theta \neq 0\right)$$

と表すことができる．

$$\overline{z}=r(\cos\theta-i\sin\theta)=r\{\cos(-\theta)+i\sin(-\theta)\}$$

であるから

$$\begin{aligned}
z^3=\overline{z}^2 &\iff r^3(\cos 3\theta+i\sin 3\theta)=r^2\{\cos(-2\theta)+i\sin(-2\theta)\}\\
&\iff \begin{cases} r^3=r^2 \\ 3\theta=-2\theta+2n\pi\ (n \text{ は整数}) \end{cases}\\
&\iff \begin{cases} r^2(r-1)=0 \\ \theta=\dfrac{2n\pi}{5} \end{cases}\\
&\therefore\quad r=1,\quad \theta=\pm\frac{2\pi}{5}
\end{aligned}$$

である．

よって，z の実部 x の値は

$$x=\cos\left(\pm\frac{2\pi}{5}\right)=\cos\frac{2\pi}{5}$$

である．ここで $w=\cos\dfrac{2\pi}{5}+i\sin\dfrac{2\pi}{5}$ とおくと w は $w^5=1$ の虚数解である．

$$w^5-1=(w-1)(w^4+w^3+w^2+w+1)$$

であるから，$w^4+w^3+w^2+w+1=0$ の解である．$w \neq 0$ が確認されるから

$$\begin{aligned}
&w^2+w+1+\frac{1}{w}+\frac{1}{w^2}=0\\
&\left(w+\frac{1}{w}\right)^2+\left(w+\frac{1}{w}\right)-1=0\\
&(w+\overline{w})^2+(w+\overline{w})-1=0 \quad (\because\ |w|=1)\\
&(2x)^2+2x-1=0\\
&4x^2+2x-1=0
\end{aligned}$$

$x>0$ より

$$\boldsymbol{x=\frac{-1+\sqrt{5}}{4}} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

である．

- $z^3 = \overline{z}^2 \iff (x+iy)^3 = (x-iy)^2$

$$\iff x^3 - 3xy^2 + (3x^2y - y^3)i = x^2 - y^2 - 2xyi$$

$$\iff \begin{cases} x^3 - 3xy^2 = x^2 - y^2 \\ 3x^2y - y^3 = -2xy \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x^3 - x^2 = (3x-1)y^2 \\ (3x^2 + 2x - y^2)y = 0 \end{cases}$$

$y \neq 0$ であるから

$$\begin{cases} y^2 = 3x^2 + 2x \\ x^3 - x^2 = (3x-1)(3x^2+2x) \end{cases}$$

となる．第 2 式を解くと

$$x^3 - x^2 = 9x^3 + 3x^2 - 2x$$
$$8x^3 + 4x^2 - 2x = 0$$
$$2x(4x^2 + 2x - 1) = 0$$

$x > 0$ より

$$x = \frac{-1+\sqrt{5}}{4}$$

である．