数列 $\{a_n\}$ の一般項が

$$a_n = 1^n + 2^n + 3^n + 4^n \quad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

であるとき，次の問いに答えよ．

(1) a_1，a_2，a_3，a_4，a_5 の値をそれぞれ求めよ．

(2) a_n が 10 の倍数になるための n の条件を推定し，その推定が正しいことを数学的帰納法を用いて証明せよ．

(24 東京海洋大 生命・資源 5)

【答】

(1) $a_1 = 10,\ a_2 = 30,\ a_3 = 100,\ a_4 = 354,\ a_5 = 1300$

(2) n が 4 の倍数でない，証明は略

【解答】

$$a_n = 1^n + 2^n + 3^n + 4^n \quad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

(1) 順に

$$a_1 = 1 + 2 + 3 + 4 = \mathbf{10}, \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$
$$a_2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 = 1 + 4 + 9 + 16 = \mathbf{30}, \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$
$$a_3 = 1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3, = 1 + 8 + 27 + 32 = \mathbf{100}, \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$
$$a_4 = 1^4 + 2^4 + 3^4 + 4^4 = 1 + 16 + 81 + 256 = \mathbf{354}, \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$
$$a_5 = 1^5 + 2^5 + 3^5 + 4^5 = 1 + 32 + 243 + 1024 = \mathbf{1300} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

である．

(2) (1) より，a_n が 10 の倍数になるための n の条件は

「n が 4 の倍数でない」　　$\cdots\cdots\ (*)$

ことと推定される．

1^n, 3^n は奇数であり，2^n, 4^n は偶数であるから，n によらず

$a_n = 1^n + 2^n + 3^n + 4^n$ は偶数

である．したがって，a_n が 10 の倍数になる条件は

「a_n が 5 の倍数になる」

ことと同値である．すべての自然数 m に対して

「a_{4m-3}，a_{4m-2}，a_{4m-1} は 5 の倍数であり，a_{4m} は 5 の倍数でない」　　$\cdots\cdots\ (**)$

ことを数学的帰納法を用いて証明する．

(i) $m = 1$ のとき

(1) より，a_1，a_2，a_3 は 5 の倍数であり，a_4 は 5 の倍数でないから，$m = 1$ のとき $(**)$ は成り立つ．

(ii) $m = k$ での成立を仮定する．

5 を法として考えると

$$\begin{aligned} a_{n+4} &= 1^{n+4} + 2^{n+4} + 3^{n+4} + 4^{n+4} \\ &= 1^n + 16 \cdot 2^n + 81 \cdot 3^n + 256 \cdot 4^n \\ &\equiv 1^n + 2^n + 3^n + 4^n \\ &= a_n \end{aligned}$$

である．さらに，数学的帰納法の仮定を用いると

$$
\begin{aligned}
&a_{4k+1} \equiv a_{4k-3} \equiv 0, \\
&a_{4k+2} \equiv a_{4k-2} \equiv 0, \\
&a_{4k+3} \equiv a_{4k-1} \equiv 0, \\
&a_{4k+4} \equiv a_{4k} \not\equiv 0
\end{aligned}
$$

が成り立つから，$m = k + 1$ のときも $(**)$ は成り立つ．

(ⅰ)，(ii) より，すべての自然数 m 対して $(**)$ は成り立つ．
よって，a_n が 10 の倍数になるための n の条件は $(*)$ である． …… (証明終わり)