与えられた自然数 a_0 に対して，自然数からなる数列 a_0，a_1，a_2，$\cdots$ を次のように定める．

$$a_{n+1}=\begin{cases}\dfrac{a_n}{2} & (a_n \text{ が偶数のとき}) \\ \dfrac{3a_n+1}{2} & (a_n\text{が奇数のとき})\end{cases}$$

次の問いに答えよ．

(1) a_0，a_1，a_2，a_3 がすべて奇数であるような最小の自然数 a_0 を求めよ．

(2) a_0，a_1，$\cdots$，a_{10} がすべて奇数であるような最小の自然数 a_0 を求めよ．

(24 京都大 理系 4)

【答】

(1) $a_0=15$

(2) $a_0=2047$

【解答】

$$a_{n+1}=\begin{cases}\dfrac{a_n}{2} & (a_n \text{ が偶数のとき}) \\ \dfrac{3a_n+1}{2} & (a_n\text{が奇数のとき})\end{cases} \qquad \cdots\cdots (*)$$

a_0，a_1，$\cdots$，a_N がすべて奇数であるならば

$$a_{n+1}=\frac{3a_n+1}{2} \quad (n=0,\ 1,\ \cdots,\ N)$$

が成り立つ．これは

$$a_{n+1}+1=\frac{3}{2}(a_n+1)$$

と変形される．数列 $\{a_n+1\}$ は初項 a_0+1，公比 $\dfrac{3}{2}$ の等比数列であるから

$$a_n+1=(a_0+1)\left(\frac{3}{2}\right)^n \quad (n=0,\ 1,\ \cdots,\ N) \qquad \cdots\cdots ①$$

である．

(1) a_0，a_1，a_2，a_3 がすべて奇数であるならば，$n=3$ について ① が成り立つことが必要である．

$$a_3+1=(a_0+1)\left(\frac{3}{2}\right)^3$$

左辺の a_3+1 は偶数であるから，$(a_0+1)\left(\dfrac{3}{2}\right)^3$ も偶数であり，2 以上の自然数 a_0+1 は 2^4 の倍数である．これを満たす最小の自然数 a_0 は $2^4-1=15$ である．

$a_0=15$ のとき

$$a_1=\frac{3\cdot 15+1}{2}=23\ (\text{奇数}),$$
$$a_2=\frac{3\cdot 23+1}{2}=35\ (\text{奇数}),$$
$$a_3=\frac{3\cdot 35+1}{2}=53\ (\text{奇数})$$

であり，a_0，a_1，a_2，a_3 がすべて奇数である (十分)．

よって，求める最小の自然数 a_0 は

$$\boldsymbol{a_0=15} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

である．

(2) a_0，a_1，$\cdots$，a_{10} がすべて奇数であるならば，$n = 10$ について ① が成り立つことが必要である．

$$a_{10} + 1 = (a_0 + 1)\left(\frac{3}{2}\right)^{10}$$

左辺の $a_{10} + 1$ は偶数であるから，$(a_0 + 1)\left(\frac{3}{2}\right)^{3}$ も偶数であり，2 以上の自然数 $a_0 + 1$ は 2^{11} の倍数である．これを満たす最小の自然数 a_0 は $2^{11} - 1$ $(= 2047)$ である．

$a_0 = 2^{11} - 1$ (奇数) のとき

$$a_1 = \frac{3a_0 + 1}{2} = \frac{3(2^{11} - 1) + 1}{2} = \frac{3 \cdot 2^{11} - 2}{2} = 3 \cdot 2^{10} - 1 \text{ (奇数)}$$

$$a_2 = \frac{3a_1 + 1}{2} = \frac{3 \cdot (3 \cdot 2^{10} - 1) + 1}{2} = \frac{3^2 \cdot 2^{10} - 2}{2} = 3^2 \cdot 2^9 - 1 \text{ (奇数)}$$

$a_k = 3^k \cdot 2^{11-k} - 1$ (奇数)$(k = 0,\ 1,\ \cdots,\ 9)$ と仮定すると

$$\begin{aligned} a_{k+1} &= \frac{3a_k + 1}{2} = \frac{3 \cdot (3^k \cdot 2^{11-k} - 1) + 1}{2} = \frac{3^{k+1} \cdot 2^{11-k} - 2}{2} \\ &= 3^{k+1} \cdot 2^{11-(k+1)} - 1 \text{ (奇数)} \end{aligned}$$

が成り立つ．また，$a_0 = 2^{11} - 1 = 3^0 \cdot 2^{11-0} - 1$ であるから，a_0，a_1，$\cdots$，a_{10} がすべて奇数である (十分)．

よって，求める最小の自然数 a_0 は

$$a_0 = 2^{11} - 1 = \mathbf{2047} \qquad \cdots\cdots\text{(答)}$$

である．