(1) 数列 $\{a_n\}$ が

$$a_{n+1} - a_n = 14 \quad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

を満たすとする．

$a_1 = 10$ のとき，$a_2 = \boxed{\text{アイ}}$，$a_3 = \boxed{\text{ウエ}}$ である．

数列 $\{a_n\}$ の一般項は，初項 a_1 を用いて

$$a_n = a_1 + \boxed{\text{オカ}}(n-1)$$

と表すことができる．

(2) 数列 $\{b_n\}$ が

$$2b_{n+1} - b_n + 3 = 0 \quad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

を満たすとする．

数列 $\{b_n\}$ の一般項は，初項 b_1 を用いて

$$b_n = \left(b_1 + \boxed{\text{キ}}\right)\left(\frac{\boxed{\text{ク}}}{\boxed{\text{ケ}}}\right)^{n-1} - \boxed{\text{コ}}$$

と表すことができる．

(3) 太郎さんは

$$(c_n + 3)(2c_{n+1} - c_n + 3) = 0 \quad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots) \qquad \cdots\cdots ①$$

を満たす数列 $\{c_n\}$ について調べることにした．

(i)

- 数列 $\{c_n\}$ が ① を満たし，$c_1 = 5$ のとき，$c_2 = \boxed{\text{サ}}$ である．
- 数列 $\{c_n\}$ が ① を満たし，$c_3 = -3$ のとき，$c_2 = \boxed{\text{シス}}$，$c_1 = \boxed{\text{セソ}}$ である．

(ii) 太郎さんは，数列 $\{c_n\}$ が ① を満たし，$c_3 = -3$ となる場合について考えている．

$c_3 = -3$ のとき，c_4 がどのような値でも

$$(c_3 + 3)(2c_4 - c_3 + 3) = 0$$

が成り立つ．

- 数列 $\{c_n\}$ が ① を満たし，$c_3 = -3,\ c_4 = 5$ のとき

  $$c_1 = \boxed{\text{セソ}},\ c_2 = \boxed{\text{シス}},\ c_3 = -3,\ c_4 = 5,\ c_5 = \boxed{\text{タ}}$$

  である．
- 数列 $\{c_n\}$ が ① を満たし，$c_3 = -3,\ c_4 = 83$ のとき

  $$c_1 = \boxed{\text{セソ}},\ c_2 = \boxed{\text{シス}},\ c_3 = -3,\ c_4 = 83,\ c_5 = \boxed{\text{チツ}}$$

  である．

(iii) 太郎さんは (i) と (ii) から，$c_n = -3$ となることがあるかどうかに着目し，次の**命題 A** が成り立つのではないかと考えた．

命題 A	数列 $\{c_n\}$ が ① を満たし，$c_1 \neq -3$ であるとする．このとき，すべての自然数 n について $c \neq -3$ である．

命題 A が真であることを証明するには，**命題 A** の仮定を満たす数列 $\{c_n\}$ について，$\boxed{\text{テ}}$ を示せばよい．

実際 このようにして **命題 A** が真であることを証明できる．

$\boxed{\text{テ}}$ については，最も適当なものを，次の⓪～④のうちから一つ選べ．

⓪ $c_2 \neq -3$ かつ $c_3 \neq -3$ であること
① $c_{100} \neq -3$ かつ $c_{200} \neq -3$ であること
② $c_{100} \neq -3$ ならば $c_{101} \neq -3$ であること
③ $n = k$ のとき $c_n \neq -3$ が成り立つと仮定すると，$n = k+1$ のときも $c_n \neq -3$ が成り立つこと
④ $n = k$ のとき $c_n = -3$ が成り立つと仮定すると，$n = k+1$ のときも $c_n = -3$ が成り立つこと

(iv) 次の (I)，(II)，(III) は，数列 $\{c_n\}$ に関する命題である．

(I) $c_1 = 3$ かつ $c_{100} = -3$ であり，かつ ① を満たす数列 $\{c_n\}$ がある．
(II) $c_1 = -3$ かつ $c_{100} = -3$ であり，かつ ① を満たす数列 $\{c_n\}$ がある．
(III) $c_1 = -3$ かつ $c_{100} = 3$ であり，かつ ① を満たす数列 $\{c_n\}$ がある．

(I)，(II)，(III) の真偽の組合せとして正しいものは $\boxed{\text{ト}}$ である．

$\boxed{\text{ト}}$ の解答群

	⓪	①	②	③	④	⑤	⑥	⑦
(I)	真	真	真	真	偽	偽	偽	偽
(II)	真	真	偽	偽	真	真	偽	偽
(III)	真	偽	真	偽	真	偽	真	偽

(24 共通テスト 本試験 IIB 4)

【答】

アイ	ウエ	オカ	キ	ク	ケ	コ	サ	シス	セソ	タ	チツ	テ	ト
24	38	14	3	1	2	3	1	-3	-3	1	40	3	4

【解答】

(1) $$a_{n+1} - a_n = 14 \quad (n \geqq 1)$$
であるから，$a_1 = 10$ のとき

$$a_2 = a_1 + 14 = 10 + 14 = \mathbf{24}$$ ……(答)
$$a_3 = a_2 + 14 = 24 + 14 = \mathbf{38}$$ ……(答)

である．

数列 $\{a_n\}$ は公差 14 の等差数列であるから，一般項は，初項 a_1 を用いて

$$a_n = a_1 + \mathbf{14}(n-1) \qquad \cdots\cdots(答)$$

と表すことができる．

(2) $$2b_{n+1} - b_n + 3 = 0 \quad (n \geqq 1) \qquad \cdots\cdots ⓐ$$

$$2\beta - \beta + 3 = 0 \qquad \cdots\cdots ⓑ$$

を解くと，$\beta = -3$ を得る．ⓐ − ⓑ より

$$2(b_{n+1} + 3) - (b_n + 3) = 0$$

$$\therefore \quad b_{n+1} + 3 = \frac{1}{2}(b_n + 3)$$

数列 $\{b_n + 3\}$ は初項 $b_1 + 2$，公比 $\dfrac{1}{2}$ の等比数列であるから，数列 $\{b_n\}$ の一般項は，初項 b_1 を用いて

$$b_n + 3 = (b_1 + 3)\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

$$\therefore \quad b_n = (b_1 + \mathbf{3})\left(\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\right)^{n-1} - \mathbf{3} \qquad \cdots\cdots(答)$$

と表すことができる．

(3) $$(c_n + 3)(2c_{n+1} - c_n + 3) = 0 \quad (n \geqq 1) \qquad \cdots\cdots ①$$

(i) ● 数列 $\{c_n\}$ が ① を満たし，$c_1 = 5$ のとき

$$(5+3)(2c_2 - 5 + 3) = 0$$

$$8(2c_2 - 2) = 0 \qquad \therefore \quad c_2 = \mathbf{1} \qquad \cdots\cdots(答)$$

である．

● 数列 $\{c_n\}$ が ① を満たし，$c_3 = -3$ のとき

$$(c_2 + 3)(2 \cdot (-3) - c_2 + 3) = 0$$

$$(c_2 + 3)(-c_2 - 3) = 0$$

$$-(c_2 + 3)^2 = 0 \qquad \therefore \quad c_2 = \mathbf{-3} \qquad \cdots\cdots(答)$$

したがって

$$(c_1 + 3)(2 \cdot (-3) - c_1 + 3) = 0$$

$$(c_1 + 3)(-c_1 - 3) = 0$$

$$-(c_1 + 3)^2 = 0 \qquad \therefore \quad c_1 = \mathbf{-3} \qquad \cdots\cdots(答)$$

である．

(ii) (i) の後半より $c_3 = -3$ のときは

$$c_1 = -3,\ c_2 = -3,\ c_3 = -3$$

である．さらに

● $c_4 = 5$ のとき

$$(5+3)(2c_5 - 5 + 3) = 0$$

$$8(2c_5 - 2) = 0 \qquad \therefore \quad c_5 = \mathbf{1} \qquad \cdots\cdots(答)$$

である．

● $c_4 = 83$ のとき

$$(83+3)(2c_5 - 83 + 3) = 0$$

$$86(2c_5 - 80) = 0 \qquad \therefore \quad c_5 = \mathbf{40} \qquad \cdots\cdots(答)$$

である．

(iii) すべての自然数 n についての命題 A が真であることを証明するには，数学的帰納法を用いればよい．すなわち，命題 A の仮定を満たす数列 $\{c_n\}$ について，

$n=k$ のとき $c_n \neq -3$ が成り立つと仮定すると，

$n=k+1$ のときも $c_n \neq -3$ が成り立つこと　(③)　……(答)

を示せばよい．

実際 このようにして **命題 A** が真であることを証明できる．

- 命題 A を数学的帰納法で証明しておく．

(ア) $n=1$ のとき

$c_1 \neq -3$ は命題 A の仮定であり，$n=1$ のとき $c_1 \neq -3$ は成立している．

(イ) $n=k$ で $c_k \neq -3$ が成り立つことを仮定すると，① より

$$2c_{k+1}-c_k+3=0 \qquad \text{であり} \qquad c_{k+1}=\frac{c_k-3}{2} \neq \frac{-3-3}{2}=-3$$

となる．$n=k+1$ のときも $c_{k+1} \neq -3$ が成り立つ．

(ア)，(イ) より，すべての自然数 n に対して $c_n \neq -3$ であることが示された．

(iv) 命題 (I)，(II)，(III) を確認していく．

(i) の後半の議論と同じく，$c_n=-3$ のとき

$$(c_{n-1}+3)(2(-3)-c_{n-1}+3)=0$$
$$-(c_{n-1}+3)^2=0 \qquad \therefore \quad c_{n-1}=-3$$

すなわち

$$c_n=c_{n-1}=\cdots=c_1=-3$$

となる．したがって，$c_1=3$ かつ $c_{100}=-3$ となることはなく**命題 (I) は偽**である．

- (I) については次のように考えてもよい．

$c_1=3$ より $c_1 \neq -3$ であり，命題 A により $c_{100} \neq -3$ であるから偽である．

また,「$c_n=-3$ のとき，c_{n+1} がどんな値でも

$$(c_n+3)(2c_{n+1}-c_n+3)=0$$

が成り立つ」 …… $(*)$ から，$c_{100}=-3$ のとき $c_{100}=c_{99}=\cdots=c_1=-3$ であり，c_{101} は任意の値にとることができる．$c_{101} \neq -3$ とすると

$$\begin{cases} c_{101} \neq -3 \\ 2c_{n+1}-c_n+3=0 \end{cases}$$

として，数列 $\{c_n\}$ $(n \geqq 101)$ は一意に決まる．すなわち，**命題 (II) は真**である．

次に，$c_1=-3$ ならば，$(*)$ より，c_2 を任意の値にとることができる．c_2 を $c_2=-3$ ととると，c_3 を任意の値にとることができる．c_3 を $c_3=-3$ ととると，$\cdots$，これを繰り返すと

$$c_1=c_2=\cdots=c_{99}=-3,\ c_{100}=3$$

ととることができる．このとき

$$\begin{cases} c_{100}=3 \\ 2c_{n+1}-c_n+3=0 \ (n \geqq 100) \end{cases}$$

により，数列 $\{c_n\}$ $(n \geqq 100)$ を一意にとることができる．すなわち，**命題 (III) は真**である．

よって，(I)，(II)，(III) の真偽の組合せは順に

偽，真，真　(④)　……(答)

である．