次の条件によって定められる数列 $\{a_n\}$ について考える．

$$a_1 = 3, \quad a_{n+1} = 3a_n - \frac{3^{n+1}}{n(n+1)} \quad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

(1) $b_n = \dfrac{a_n}{3^n}$ とおくとき，b_{n+1} を b_n と n の式で表せ．

(2) 数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ．

(24 北海道大 文系 2)

【答】

(1) $b_{n+1} = b_n - \dfrac{1}{n(n+1)}$

(2) $a_n = \dfrac{3^n}{n}$

【解答】

$$a_1 = 3 \qquad \cdots\cdots ①$$

$$a_{n+1} = 3a_n - \frac{3^{n+1}}{n(n+1)} \quad (n \geqq 1) \qquad \cdots\cdots ②$$

(1) ② の辺々を 3^{n+1} で割ると

$$\frac{a_{n+1}}{3^{n+1}} = \frac{a_n}{3^n} - \frac{1}{n(n+1)}$$

であり，$b_n = \dfrac{a_n}{3^n}$ とおくと

$$\boldsymbol{b_{n+1} = b_n - \frac{1}{n(n+1)}} \qquad \cdots\cdots ③ \qquad \cdots\cdots(答)$$

である．

(2) ③ より，$n \geqq 2$ のとき

$$\begin{aligned} b_n &= b_1 + \sum_{k=1}^{n-1} \left\{ -\frac{1}{k(k+1)} \right\} \\ &= \frac{a_1}{3} - \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) \\ &= \frac{3}{3} - \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{n} \right) \quad (\because\ ①) \\ &= \frac{1}{n} \end{aligned}$$

これは $n = 1$ のときも成り立つ．

よって

$$a_n = 3^n b_n = \boldsymbol{\frac{3^n}{n}} \quad (n \geqq 1) \qquad \cdots\cdots(答)$$

である．

- ③ は

$$b_{n+1} = b_n - \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right)$$

$$\therefore \quad b_{n+1} - \frac{1}{n+1} = b_n - \frac{1}{n}$$

と変形される．数列 $\left\{ b_n - \dfrac{1}{n} \right\}$ は定数数列であり，$b_1 - \dfrac{1}{1} = \dfrac{a_1}{3} - 1 = \dfrac{3}{3} - 1 = 0$ であるから

$$b_n - \frac{1}{n} = 0 \qquad \therefore \quad b_n = \frac{1}{n}$$

$$\therefore \quad a_n = 3^n b_n = \frac{3^n}{n}$$

である．