自然数 n に対し，

$$(3+2\sqrt{2})^n = a_n + b_n\sqrt{2}$$

を満たす自然数の数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ を考える．

(1) $n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots$ に対し，a_{n+1}, b_{n+1} を a_n, b_n を用いて表せ．
(2) $n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots$ に対し，$(3-2\sqrt{2})^n = a_n - b_n\sqrt{2}$ が成り立つことを示せ．
(3) ${a_n}^2 - 2{b_n}^2$ は n によらない定数であることを示せ．
(4) (3) の定数を α とするとき，

$$(3+2\sqrt{2})^n = \sqrt{k_n} + \sqrt{k_n - \alpha},\quad (3-2\sqrt{2})^n = \sqrt{k_n} - \sqrt{k_n - \alpha}$$

を満たす自然数 k_n $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ が存在することを示せ．

(24 東京海洋大 海洋工 2)

【答】
(1) $a_{n+1} = 3a_n + 4b_n$, $b_{n+1} = 2a_n + 3b_n$
(2) 略
(3) 略
(4) 略

【解答】

$$(3+2\sqrt{2})^n = a_n + b_n\sqrt{2} \qquad \cdots\cdots ①$$

(1) ① より

$$\begin{aligned} a_{n+1} + b_{n+1}\sqrt{2} &= (3+2\sqrt{2})^{n+1} \\ &= (3+2\sqrt{2})(a_n + b_n\sqrt{2}) \quad (\because ①) \\ &= 3a_n + 4b_n + (2a_n + 3b_n)\sqrt{2} \end{aligned}$$

であり，a_{n+1}, b_{n+1}, $3a_n+4b_n$, $2a_n+3b_n$ は有理数，$\sqrt{2}$ は無理数であるから

$$\boldsymbol{a_{n+1} = 3a_n + 4b_n,\quad b_{n+1} = 2a_n + 3b_n} \qquad \cdots\cdots ② \qquad \cdots\cdots(答)$$

が成り立つ．

(2) すべての自然数 n に対して

$$(3-2\sqrt{2})^n = a_n - b_n\sqrt{2} \qquad \cdots\cdots ③$$

が成り立つことを数学的帰納法を用いて示す．

(i) $n=1$ のとき，① より $a_1 = 3$, $b_1 = 2$ である．

$$(3-2\sqrt{2})^1 = a_1 - b_1\sqrt{2}$$

となるから，$n=1$ のとき ③ は成り立つ．

(ii) $n=k$ での成立を仮定すると

$$\begin{aligned} (3-2\sqrt{2})^{k+1} &= (3-2\sqrt{2})(a_k - b_k\sqrt{2}) \quad (\because \text{帰納法の仮定}) \\ &= 3a_k + 4b_k - (2a_k + 3b_k)\sqrt{2} \\ &= a_{k+1} - b_{k+1}\sqrt{2} \quad (\because ②) \end{aligned}$$

であるから，$n=k+1$ のときも ③ は成立する．

(i), (ii) より，すべての自然数 n に対して ③ が成り立つことが示された．

……(証明終わり)

(3) ①，③の辺々かけると

$$(3+2\sqrt{2})^n(3-2\sqrt{2})^n=(a_n+b_n\sqrt{2})(a_n-b_n\sqrt{2})$$
$$\therefore\quad {a_n}^2-2{b_n}^2=(9-8)^n=1 \qquad \cdots\cdots ④$$

を得る．よって，${a_n}^2-2{b_n}^2$ は n によらない定数である． …… (証明終わり)

(4) $(3+2\sqrt{2})^n$ を目標の形に変形すると

$$\begin{aligned}(3+2\sqrt{2})^n &= a_n+b_n\sqrt{2}\\ &= \sqrt{{a_n}^2}+\sqrt{2{b_n}^2} \quad (\because\ a_n,\ b_n\text{は正である})\\ &= \sqrt{{a_n}^2}+\sqrt{{a_n}^2-1} \quad (\because\ ④)\end{aligned}$$

となる．同様にして

$$\begin{aligned}(3-2\sqrt{2})^n &= a_n-b_n\sqrt{2}\\ &= \sqrt{{a_n}^2}-\sqrt{{a_n}^2-1}\end{aligned}$$

となる．よって

$$(3+2\sqrt{2})^n=\sqrt{k_n}+\sqrt{k_n-\alpha},\quad (3-2\sqrt{2})^n=\sqrt{k_n}-\sqrt{k_n-\alpha}$$

を満たす自然数 k_n $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ として

$$k_n={a_n}^2$$

が存在する． …… (証明終わり)