n を 2 以上の整数とする．それぞれ A，A，B と書かれた 3 枚のカードから無作為に 1 枚抜き出し，カードをもとに戻す試行を考える．この試行を n 回繰り返し，抜き出したカードの文字を順に左から右に並べ，n 文字の文字列を作る．作った文字列内に AAA の並びがある場合は不可とする．また，作った文字列内に BB の並びがある場合も不可とする．これらの場合以外は可とする．たとえば $n=6$ のとき，文字列 AAAABA や ABBBAA や ABBABB や BBBAAA などは不可で，文字列 BABAAB や BABABA などは可である．作った文字列が可でかつ右端の 2 文字が AA である確率を p_n，作った文字列が可でかつ右端の 2 文字が BA である確率を q_n，作った文字列が可でかつ右端の文字が B である確率を r_n とそれぞれおく．

(1) p_2，q_2，r_2 をそれぞれ求めよ．また，p_{n+1}，q_{n+1}，r_{n+1} を p_n，q_n，r_n を用いてそれぞれ表せ．

(2) $p_n+2q_n+2r_n$ を n を用いて表せ．

(3) $p+iq_n-(1+i)r_n$ を n を用いて表せ．ただし，i は虚数単位である．

(4) $p_n=r_n$ を満たすための，n の必要十分条件を求めよ．

(24 東北大 理系 3)

【答】

(1) $p_2=\dfrac{4}{9}$，$q_2=\dfrac{2}{9}$，$r_2=\dfrac{2}{9}$，$p_{n+1}=\dfrac{2}{3}q_n$，$q_{n+1}=\dfrac{2}{3}r_n$，$r_{n+1}=\dfrac{1}{3}p_n+\dfrac{1}{3}q_n$

(2) $p_n+2q_n+2r_n=2\left(\dfrac{2}{3}\right)^{n-1}\quad(n\geqq 2)$

(3) $p_n+iq_n-(1+i)r_n=\dfrac{2}{9}\left(-\dfrac{1+i}{3}\right)^{n-2}\quad(n\geqq 2)$

(4) n が 4 の倍数

【解答】

A と書かれたカードを抜きだす確率は $\dfrac{2}{3}$ であり，B と書かれたカードを抜きだす確率は $\dfrac{1}{3}$ である．

(1) p_2，q_2，r_2 は作った文字列がそれぞれ AA，BA，AB となる確率なので

$$p_2=\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}=\boldsymbol{\frac{4}{9}}\qquad\cdots\cdots(答)$$

$$q_2=\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}=\boldsymbol{\frac{2}{9}}\qquad\cdots\cdots(答)$$

$$r_2=\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}=\boldsymbol{\frac{2}{9}}\qquad\cdots\cdots(答)$$

である．

また，AAA, BB が不可であることに注意すると，可である n 文字列から可である $n+1$ 文字列の作り方は

可である n 文字列		可である $(n+1)$ 文字列	
$\cdots$AA	$\longrightarrow$	$\cdots$AA$\boxed{\text{B}}$	$:p_n\cdot\dfrac{1}{3}$
$\cdots$BA	$\longrightarrow$	$\cdots$BA$\boxed{\text{A}}$	$:q_n\cdot\dfrac{2}{3}$
	$\searrow$	$\cdots$BA$\boxed{\text{B}}$	$:q_n\cdot\dfrac{1}{3}$
$\cdots$B	$\longrightarrow$	$\cdots$B$\boxed{\text{A}}$	$:r_n\cdot\dfrac{2}{3}$

のいずれかである．これらは排反であるから

$$\boldsymbol{p_{n+1} = \frac{2}{3}q_n} \quad \cdots\cdots ① \qquad \cdots\cdots(答)$$

$$\boldsymbol{q_{n+1} = \frac{2}{3}r_n} \quad \cdots\cdots ② \qquad \cdots\cdots(答)$$

$$\boldsymbol{r_{n+1} = \frac{1}{3}p_n + \frac{1}{3}q_n} \quad \cdots\cdots ③ \qquad \cdots\cdots(答)$$

である．

(2) ①，②，③ より

$$\begin{aligned} p_{n+1} + 2q_{n+1} + 2r_{n+1} &= \frac{2}{3}q_n + \frac{4}{3}r_n + \left(\frac{2}{3}p_n + \frac{2}{3}q_n\right) \\ &= \frac{2}{3}(p_n + 2q_n + 2r_n) \end{aligned}$$

であり，$n \geqq 2$ のとき $\{p_n + 2q_n + 2r_n\}$ は初項 $p_2 + 2q_2 + 2r_2 = \frac{4}{9} + 2 \cdot \frac{2}{9} + 2 \cdot \frac{2}{9} = \frac{4}{3}$，公比 $\frac{2}{3}$ の等比数列であるから

$$p_n + 2q_n + 2r_n = \frac{4}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^{n-2} = \boldsymbol{2\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}} \quad (n \geqq 2) \qquad \cdots\cdots(答)$$

である．

(3) ①，②，③ より

$$\begin{aligned} p_{n+1} + iq_{n+1} - (1+i)r_{n+1} &= \frac{2}{3}q_n + i\frac{2}{3}r_n - (1+i)\left(\frac{1}{3}p_n + \frac{1}{3}q_n\right) \\ &= -\frac{1+i}{3}p_n + \frac{1-i}{3}q_n + \frac{2i}{3}r_n \\ &= -\frac{1+i}{3}\left(p_n - \frac{1-i}{1+i}q_n - \frac{2i}{1+i}r_n\right) \\ &= -\frac{1+i}{3}\left\{p_n - \frac{-2i}{2}q_n - \frac{2i(1-i)}{2}r_n\right\} \\ &= -\frac{1+i}{3}\{p_n + iq_n - (1+i)r_n\} \end{aligned}$$

であり，$n \geqq 2$ のとき $\{p_n + iq_n - (1+i)r_n\}$ は初項 $p_2 + iq_2 - (1+i)r_2 = \frac{4}{9} + i\frac{2}{9} - (1+i)\frac{2}{9} = \frac{2}{9}$，公比 $-\frac{1+i}{3}$ の等比数列であるから

$$\boldsymbol{p_n + iq_n - (1+i)r_n = \frac{2}{9}\left(-\frac{1+i}{3}\right)^{n-2}} \quad (n \geqq 2) \qquad \cdots\cdots(答)$$

である．

(4) (3) の結果を変形すると

$$\begin{aligned} &p_n - r_n + i(q_n - r_n) \\ &= \frac{2}{9}\frac{1}{(-3)^{n-2}}(1+i)^{n-2} \\ &= \frac{2}{(-3)^n}\left\{\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)\right\}^{n-2} \\ &= \left(-\frac{\sqrt{2}}{3}\right)^n\left\{\cos\frac{(n-2)\pi}{4} + i\sin\frac{(n-2)\pi}{4}\right\} \quad (\because \text{ ド・モアブルの定理}) \end{aligned}$$

となる．p_n，q_n，r_n は実数であるから，上式の実部を比較すると

$$p_n - r_n = \left(-\frac{\sqrt{2}}{3}\right)^n \cos\frac{(n-2)\pi}{4}$$

が成り立つから，$p_n = r_n$ となる条件は

$$\cos\frac{(n-2)\pi}{4} = 0 \iff \frac{(n-2)\pi}{4} = \frac{\pi}{2} + k\pi$$

を満たす整数 k が存在することである．式を整理すると

$$n-2=2+4k \qquad \therefore \quad n=4(k+1)$$

となる．

　よって，求める必要十分条件は

$$\boldsymbol{n} \text{ が } \mathbf{4} \text{ の倍数} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

であることである．