3 次関数 $f(x)=\dfrac{1}{3}x^3-x+a$ について，次の問いに答えよ．ただし，a は定数とする．

(1) $a=\dfrac{2}{3}$ のとき，$y=f(x)$ のグラフをかけ．

(2) $0\leqq a<2$ のとき，区間 $-\dfrac{3}{2}\leqq x\leqq\dfrac{3}{2}$ における $|f(x)|$ の最大値を a を用いて表せ．また，そのときの x の値を求めよ．

(24 東京海洋大 生命・資源 1)

【答】

(1) 略

(2) 最大値は $a+\dfrac{2}{3}$，最大値を与える x の値は $\begin{cases} a=0\text{ のとき} & x=\pm 1 \\ 0<a<2\text{ のとき} & x=-1 \end{cases}$

【解答】

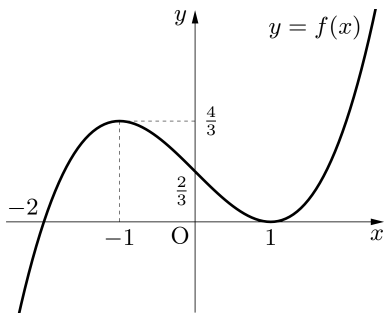
$$f(x)=\frac{1}{3}x^3-x+a$$

(1) $a=\dfrac{2}{3}$ のとき

$$f(x)=\frac{1}{3}x^3-x+\frac{2}{3}$$
$$f'(x)=x^2-1=(x+1)(x-1)$$

であり，$f(x)$ の増減は下表となる．

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	$\frac{4}{3}$	$\searrow$	0	$\nearrow$



また

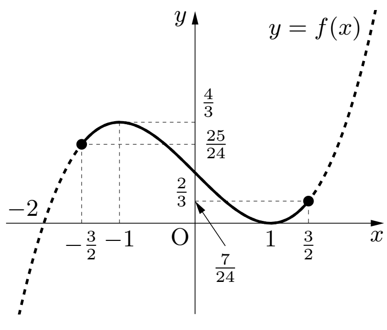
$$f(x)=\frac{1}{3}(x-1)^2(x+2)$$

であり，$y=f(x)$ のグラフは右図となる．

(2) $a=\dfrac{2}{3}$ のとき，$y=f(x)\ \left(-\dfrac{3}{2}\leqq x\leqq\dfrac{3}{2}\right)$ …… ① のグラフは

$$f\left(-\frac{3}{2}\right)=-\frac{9}{8}+\frac{3}{2}+\frac{2}{3}=\frac{25}{24}$$
$$f\left(\frac{3}{2}\right)=\frac{9}{8}-\frac{3}{2}+\frac{2}{3}=\frac{7}{24}$$

より，右図の太線となり，$-\dfrac{3}{2}\leqq x\leqq\dfrac{3}{2}$ における $f(x)$ の最大値は $f(-1)$，最小値は $f(1)$ である．



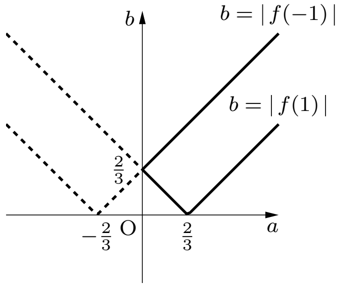
$0\leqq a<2$ のときの $y=f(x)$ のグラフは ① のグラフを y 軸方向に平行移動したものであるから，$f(x)$ の最大値は $f(-1)$，最小値は $f(1)$ であり，$|f(x)|$ の最大値は $|f(-1)|$ と $|f(1)|$ のうち小さくない方である．

$0 \leqq a < 2$ のとき

$$|f(-1)| = \left| a + \frac{2}{3} \right| = a + \frac{2}{3}$$

$$|f(1)| = \left| a - \frac{2}{3} \right| = \begin{cases} -\left(a - \dfrac{2}{3}\right) & \left(0 \leqq a \leqq \dfrac{2}{3} \text{ のとき}\right) \\ a - \dfrac{2}{3} & \left(\dfrac{2}{3} \leqq a < 2 \text{ のとき}\right) \end{cases}$$

であり，$b = |f(-1)|$，$b = |f(-1)|$ を ab 平面に図示すると，右図の太線となり



$$|f(-1)| \geqq |f(1)|$$

である．

よって，$|f(x)|$ の

最大値は　$\boldsymbol{a + \dfrac{2}{3}}$　　……(答)

であり，最大値を与える x の値は

$\boldsymbol{a = 0}$ **のとき，**　$\boldsymbol{x = \pm 1}$　　……(答)

$\boldsymbol{0 < a < 2}$ **のとき，** $\boldsymbol{x = -1}$　　……(答)

である．