

次の問に答えよ.

- (1)  $x$  の方程式  $(k-1)x^2 + (k+1)x + k-1 = 0$  が相異なる 2 つの実数解をもつような整数  $k$  をすべて求めよ.
- (2)  $\frac{x^2-x+1}{x^2+x+1}$  が整数となるような実数  $x$  をすべて求めよ.

(24 北海道大 後理・工 2)

【答】

(1)  $k = 2$

(2)  $x = 0, \frac{-3 \pm \sqrt{5}}{2}, -1$

【解答】

(1)  $(k-1)x^2 + (k+1)x + k-1 = 0$  …… ①

(i)  $k = 1$  のとき

$$\textcircled{1} \iff 2x = 0 \quad \therefore x = 0$$

実数解は 1 つである.

(ii)  $k \neq 1$  のとき

① は 2 次方程式であり, 相異なる 2 つの実数解をもつ条件は (判別式)  $> 0$  である. 判別式を  $D$  とおくと

$$\begin{aligned} D &= (k+1)^2 - 4(k-1)^2 \\ &= \{(k+1) + 2(k-1)\}\{(k+1) - 2(k-1)\} \\ &= -(3k-1)(k-3) \end{aligned}$$

であるから,  $D > 0$  の解は

$$\frac{1}{3} < k < 3 \quad (k \neq 1)$$

である.

以上 (i), (ii) より, 求める整数  $k$  のすべては

$$k = 2$$

……(答)

である.

(2)  $\frac{x^2-x+1}{x^2+x+1} = k$  ( $k$  は整数) …… ②

となる実数  $x$  を求める. (分母)  $= x^2 + x + 1 = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} \neq 0$  であり

$$\begin{aligned} \textcircled{2} &\iff x^2 - x + 1 = k(x^2 + x + 1) \\ &\iff (k-1)x^2 + (k+1)x + k-1 = 0 \end{aligned}$$

であり, ① と一致する. (1) と同じ場合分けをする.

(i)  $k = 1$  のとき

① の解は実数  $x = 0$  である.

(ii)  $k \neq 1$  のとき

① が実数解をもつ条件は判別式  $D \geq 0$  であり

$$\frac{1}{3} \leq k \leq 3 \quad (k \neq 1)$$

である.  $k$  は整数であるから

$$k = 2, 3$$

である.

$k = 2$  を ① に代入すると

$$x^2 + 3x + 1 = 0 \quad \therefore x = \frac{-3 \pm \sqrt{5}}{2}$$

$k = 3$  を ① に代入すると

$$2x^2 + 4x + 2 = 0 \quad 2(x+1)^2 = 0 \quad \therefore x = -1$$

である.

以上 (i), (ii) より, 求める実数  $x$  のすべては

$$x = 0, \frac{-3 \pm \sqrt{5}}{2}, -1 \quad \dots\dots(\text{答})$$

である.