a を正の実数とし，関数 $f(x) = x^3 - 3a^2x$ を考える．

(1) b を実数とする．$f(1) > b$ が成り立つ点 $(a,\ b)$ の領域 S_1 を図示せよ．

(2) x の方程式 $f(x) = b$ が 3 つの相異なる実数解をもつ点 $(a,\ b)$ の領域 S_2 を図示せよ．

(24 東京海洋大 海洋工 1)

【答】

(1) 略

(2) 略

【解答】

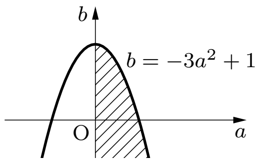
$$f(x) = x^3 - 3a^2x$$

(1) $f(1) = 1 - 3a^2$ より

$$f(1) > b \iff b < -3a^2 + 1$$

である．

$a > 0$ であることも注意すると，$f(1) > b$ が成り立つ領域 S_1 は右図の斜線部分となる．境界は含まない．

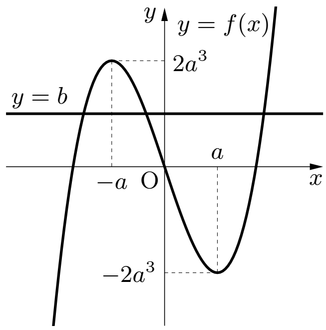


(2) x の方程式 $f(x) = b$ の実数解は，曲線 $C : y = f(x)$ と直線 $\ell : y = b$ の共有点の x 座標であるから，$f(x) = b$ が 3 つの相異なる実数解をもつ条件は，曲線 C と直線 ℓ が 3 つの共有点をもつことである．

$$\begin{aligned} f'(x) &= 3x^2 - 3a^2 \\ &= 3(x + a)(x - a) \end{aligned}$$

$a > 0$ より，$f(x)$ の増減は下表となる．

x	$\cdots$	$-a$	$\cdots$	a	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	$2a^3$	$\searrow$	$-2a^3$	$\nearrow$



$y = f(x)$ のグラフは右図のようになるので，$y = b$ のグラフとあわせると，求める条件は

$$-2a^3 < b < 2a^3$$

である．

よって，領域 S_2 は下図の斜線部分となる．境界は含まない．