次の問に答えよ．

(1) α を実数とする．次のように定められた数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ．

$$a_1 = \alpha, \quad a_{n+1} = \frac{1}{2}a_n + 1 \quad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

(2) 関数 $f_1(x),\ f_2(x),\ f_3(x),\ \cdots$ を次の関係式で定める．

$$f_1(x) = 3x$$

$$f_{n+1}(x) = (n+2)x^{n+1} + \left(\int_0^1 f_n(t)\,dt\right)x \quad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

関数 $f_n(x)$ を x と n の式で表せ．

(24 北海道大 理系 3)

【答】

(1) $a_n = 2 + (\alpha - 2)\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

(2) $f_n(x) = (n+1)x^n + \left\{2 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right\}x \quad (n \geqq 1)$

【解答】

(1)
$$a_{n+1} = \frac{1}{2}a_n + 1 \quad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots) \qquad \cdots\cdots ①$$

① は

$$a_{n+1} - 2 = \frac{1}{2}(a_n - 2)$$

と変形される．数列 $\{a_n - 2\}$ は初項が $a_1 - 2 = \alpha - 2$，公比が $\frac{1}{2}$ の等比数列であるから，$\{a_n\}$ の一般項は

$$a_n - 2 = (\alpha - 2)\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

$$\therefore\ \boldsymbol{a_n = 2 + (\alpha - 2)\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}} \qquad \cdots\cdots(答)$$

である．

(2)
$$f_1(x) = 3x \qquad \cdots\cdots ②$$

$$f_{n+1}(x) = (n+2)x^{n+1} + \left(\int_0^1 f_n(t)\,dt\right)x \quad (n \geqq 1) \qquad \cdots\cdots ③$$

$\int_0^1 f_n(t)\,dt$ は n により決まる値であるから，$b_n = \int_0^1 f_n(t)\,dt\ (n \geqq 1)$ とおくと，③ は

$$f_{n+1}(x) = (n+2)x^{n+1} + b_n x$$

となる．これより

$$\begin{aligned} b_{n+1} &= \int_0^1 f_{n+1}(t)\,dt \\ &= \int_0^1 \{(n+2)t^{n+1} + b_n t\}\,dt \\ &= \left[t^{n+2} + \frac{b_n}{2}t^2\right]_0^1 \\ &= 1 + \frac{b_n}{2} \end{aligned}$$

である．

$$\begin{aligned} b_1 &= \int_0^1 f_1(t)\,dt = \int_0^1 3t\,dt \quad (\because ②) \\ &= \left[\frac{3}{2}t^2\right]_0^1 = \frac{3}{2} \end{aligned}$$

であるから，(1) の結果を用いると

$$b_n = 2 + \left(\frac{3}{2} - 2\right)\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = 2 - \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

となる．したがって

$$f_{n+1}(x) = (n+2)x^n + \left\{2 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right\}x \quad (n \geqq 1)$$

であるから $n \geqq 2$ のとき

$$f_n(x) = (n+1)x^n + \left\{2 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right\}x \qquad \cdots\cdots ④$$

である．④ に $n=1$ を代入すると

$$f_1(x) = 2x + (2-1)x = 3x$$

となるから，③は $n=1$ でも成り立つ．以上より

$$\boldsymbol{f_n(x) = (n+1)x^n + \left\{2 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right\}x \quad (n \geqq 1)} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

である．