a, b を実数とする．曲線 $C : y = x^2$ と曲線 $C' : y = -x^2 + ax + b$ はある点を共有しており，その点におけるそれぞれの接線は直交している．C と C' で囲まれた部分の面積の最小値を求めよ．

(24 一橋大 2)

【答】 $\dfrac{1}{3}$

【解答】

$$C : y = x^2$$

$$C' : y = -x^2 + ax + b$$

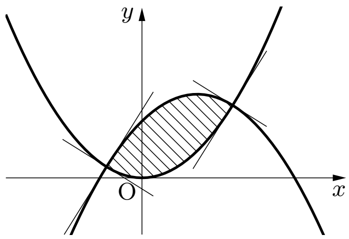
$f(x) = x^2$，$g(x) = -x^2 + ax + b$ とおくと

C, C'はある点を共有し，その点におけるそれぞれの接線は直交する

$\iff \begin{cases} f(t) = g(t) \\ f'(t)g'(t) = -1 \end{cases}$ を満たす実数 t が存在する

$$\therefore \quad \begin{cases} t^2 = -t^2 + at + b \\ 2t(-2t + a) = -1 \end{cases}$$

$$\therefore \quad \begin{cases} 2t^2 - at - b = 0 & \cdots\cdots ① \\ 2t(2t - a) = 1 & \cdots\cdots ② \end{cases}$$



② より $t \fallingdotseq 0$ であるから

$$a = 2t - \frac{1}{2t}, \quad b = 2t^2 - \left(2t - \frac{1}{2t}\right)t = \frac{1}{2} \qquad \cdots\cdots ㋐$$

このとき，C, C' の共有点の x 座標は

$$x^2 = -x^2 + \left(2t - \frac{1}{2t}\right)x + \frac{1}{2}$$

$$\therefore \quad 2x^2 - \left(2t - \frac{1}{2t}\right)x - \frac{1}{2} = 0$$

$$\therefore \quad (x - t)\left(2x + \frac{1}{2t}\right) = 0$$

$$\therefore \quad x = t,\ -\frac{1}{4t}$$

t, $-\dfrac{1}{4t}$ の大小は確定しないから，C と C' で囲まれた部分の面積 S は

$$\begin{aligned}
S &= \left| \int_{-\frac{1}{4t}}^{t} \{g(x) - f(x)\}\,dx \right| \\
&= \left| -2\int_{-\frac{1}{4t}}^{t} (x - t)\left(x + \frac{1}{4t}\right)\,dx \right| \\
&= 2 \times \frac{1}{6}\left| \left(t + \frac{1}{4t}\right)^3 \right| \\
&= \frac{1}{3}\left(|t| + \frac{1}{4|t|}\right)^3 \qquad \left(\because\ t \text{ と } \frac{1}{4t} \text{ は同符号}\right) \\
&\geqq \frac{1}{3}\left(2\sqrt{|t| \cdot \frac{1}{4|t|}}\right)^3 \qquad (\because\ \text{相加平均・相乗平均の関係}) \\
&= \frac{1}{3}
\end{aligned}$$

等号は $|t| = \dfrac{1}{4|t|}$ すなわち $t = \pm\dfrac{1}{2}$ のとき成り立つ．

よって，S は $t = \pm\dfrac{1}{2}$ のとき，**最小値 $\boldsymbol{\dfrac{1}{3}}$** をとる． ……(答)

- $a=2t-\dfrac{1}{2t}$ は少々汚いので，㋐ 以降を次のように処理してもよい．

 ㋐ より，C, C' の共有点の x 座標は

$$x^2=-x^2+ax+\frac{1}{2}$$
$$\therefore\quad 2x^2-ax-\frac{1}{2}=0$$

の解である．

$$(\text{判別式})=a^2-4\cdot 2\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)=a^2+4>0$$

より，この方程式は異なる 2 つの実数解をもつ．2 解を α, $\beta(\alpha<\beta)$ とおくと，C と C' で囲まれた部分の面積 S は

$$\begin{aligned}
S&=\int_\alpha^\beta\{g(x)-f(x)\}\,dx\\
&=\int_\alpha^\beta-2(x-\alpha)(x-\beta)\,dx\\
&=2\times\frac{(\beta-\alpha)^3}{6}\\
&=\frac{1}{3}\left(\frac{a+\sqrt{a^2+4}}{4}-\frac{a-\sqrt{a^2+4}}{4}\right)^3\\
&=\frac{1}{24}\left(\sqrt{a^2+4}\right)^3\\
&\geqq\frac{1}{24}(\sqrt{4})^3\\
&=\frac{1}{3}
\end{aligned}$$

等号は

$$a=0\iff 2t-\frac{1}{2t}=0\qquad\therefore\quad t=\pm\frac{1}{2}$$

のとき成立する．

 よって，S の最小値は $\boldsymbol{\dfrac{1}{3}}$ である．