関数 $y=x^2-4x+5$ のグラフの $x>1$ の部分を C とする．このとき，下の条件を満たすような正の実数 $a,\ b$ について，座標平面の点 $(a,\ b)$ が動く領域の面積を求めよ．

「C と直線 $y=ax+b$ は二つの異なる共有点を持つ.」

(24 京都大 文系 5)

【答】 $\dfrac{50-20\sqrt{3}}{3}$

【解答】

$$C: y=x^2-4x+5 \quad (x>1)$$

C と直線 $y=ax+b$ との共有点の x 座標は

$$x^2-4x+5=ax+b$$
$$\therefore\quad x^2-(a+4)x+5-b=0$$

の解である．$f(x)=x^2-(a+4)x+5-b$ とおくと，「C と直線 $y=ax+b$ が二つの異なる共有点を持つ」ための条件は

「$f(x)=0$ が $x>1$ の範囲に異なる二つの異なる実数解を持つ」…… $(*)$

ことである．$y=f(x)$ のグラフは下に凸であるから

$$(*) \iff \begin{cases} 頂点の\ y\ 座標：f\left(\dfrac{a+4}{2}\right)<0 \\ 軸の位置：\dfrac{a+4}{2}>1 \\ 端点の\ y\ 座標：f(1)>0 \end{cases}$$

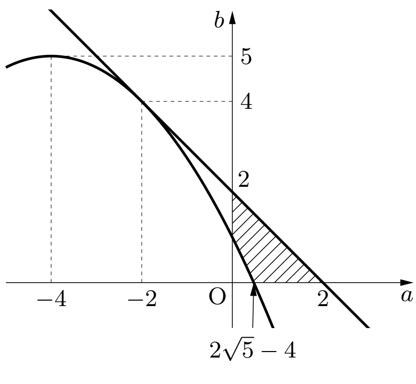
$$\therefore\quad \begin{cases} -\dfrac{(a+4)^2}{4}+5-b<0 \\ a+4>2 \\ 1-(a+4)+5-b>0 \end{cases}$$

$$\therefore\quad \begin{cases} b>-\dfrac{(a+4)^2}{4}+5 \\ a>-2 \\ b<-a+2 \end{cases}$$

となる．$b=-\dfrac{(a+4)^2}{4}+5$ と $b=-a+2$ を連立すると

$$-\frac{(a+4)^2}{4}+5=-a+2$$
$$-(a+4)^2+20=-4a+8$$
$$a^2+4a+4=0$$
$$(a+2)^2=0$$
$$\therefore\quad a=-2\ (重解)$$

$a>0,\ b>0$ のもとで，座標平面の点 $(a,\ b)$ が動く領域を図示すると右図の斜線部分となる．境界はすべて含まない．



斜線部分の面積を S とおくと

$$
\begin{aligned}
S &= \frac{1}{2}\cdot 2\cdot 2-\int_0^{2\sqrt{5}-4}\left\{-\frac{(a+4)^2}{4}+5\right\}da\\
&= 2-\left[-\frac{(a+4)^3}{12}+5a\right]_0^{2\sqrt{5}-4}\\
&= 2-\left\{-\frac{(2\sqrt{5})^3-4^3}{12}+5(2\sqrt{5}-4)\right\}\\
&= 2+\frac{40\sqrt{5}-64}{12}-10\sqrt{5}+20\\
&= \frac{10\sqrt{5}-16}{3}-10\sqrt{5}+22\\
&= \boldsymbol{\frac{50-20\sqrt{3}}{3}} \qquad \cdots\cdots(答)
\end{aligned}
$$

である.