m を $m>1$ を満たす定数とし，$f(x)=3(x-1)(x-m)$ とする．また，$S(x)=\displaystyle\int_0^x f(t)\,dt$ とする．関数 $y=f(x)$ と $y=S(x)$ のグラフの関係について考えてみよう．

(1) $m=2$ のとき，すなわち，$f(x)=3(x-1)(x-2)$ のときを考える．

(i) $f'(x)=0$ となる x の値は $x=\dfrac{\boxed{\text{ア}}}{\boxed{\text{イ}}}$ である．

(ii) $S(x)$ を計算すると

$$
\begin{aligned}
S(x) &= \int_0^x f(t)\,dt \\
&= \int_0^x \left(3t^2-\boxed{\text{ウ}}\,t+\boxed{\text{エ}}\right)dt \\
&= x^3-\frac{\boxed{\text{オ}}}{\boxed{\text{カ}}}x^2+\boxed{\text{キ}}\,x
\end{aligned}
$$

であるから

$x=\boxed{\text{ク}}$ のとき，$S(x)$ は極大値 $\dfrac{\boxed{\text{ケ}}}{\boxed{\text{コ}}}$ をとり

$x=\boxed{\text{サ}}$ のとき，$S(x)$ は極小値 $\boxed{\text{シ}}$ をとることがわかる．

(iii) $f(3)$ と一致するものとして，次の 0〜4 のうち，正しいものは $\boxed{\text{ス}}$ である．

$\boxed{\text{ス}}$ の解答群

0 $S(3)$
1 2 点 $(2,\ S(2))$，$(4,\ S(4))$ を通る直線の傾き
2 2 点 $(0,\ 0)$，$(3,\ S(3))$ を通る直線の傾き
3 関数 $y=S(x)$ のグラフ上の点 $(3,\ S(3))$ における接線の傾き
4 関数 $y=f(x)$ のグラフ上の点 $(3,\ f(3))$ における接線の傾き

(2) $0\leqq x\leqq 1$ の範囲で，関数 $y=f(x)$ のグラフと x 軸および y 軸で囲まれた図形の面積を S_1，$1\leqq x\leqq m$ の範囲で，関数 $y=f(x)$ のグラフと x 軸で囲まれた図形の面積を S_2 とする．このとき，$S_1=\boxed{\text{セ}}$，$S_2=\boxed{\text{ソ}}$である．

$S_1=S_2$ となるのは $\boxed{\text{タ}}=0$ のときであるから，$S_1=S_2$ が成り立つような $f(x)$ に対する関数 $y=S(x)$ のグラフの概形は $\boxed{\text{チ}}$ である．また，$S_1>S_2$ が成り立つような $f(x)$ に対する関数 $y=S(x)$ のグラフの概形は $\boxed{\text{ツ}}$ である．

$\boxed{\text{セ}}$，$\boxed{\text{ソ}}$ の解答群 (同じものを繰り返し選んでもよい．)

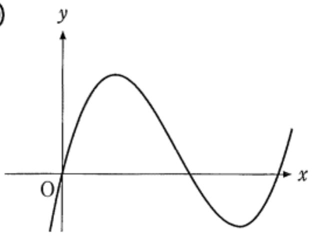
⓪ $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx$	① $\displaystyle\int_0^m f(x)\,dx$	② $\displaystyle\int_1^m f(x)\,dx$
③ $\displaystyle\int_0^1 \{-f(x)\}\,dx$	④ $\displaystyle\int_0^m \{-f(x)\}\,dx$	⑤ $\displaystyle\int_1^m \{-f(x)\}\,dx$

$\boxed{\text{タ}}$ の解答群

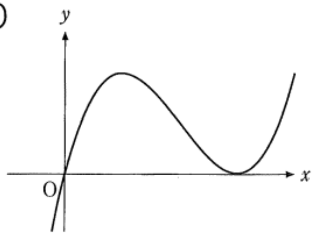
⓪ $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx$	① $\displaystyle\int_0^m f(x)\,dx$
② $\displaystyle\int_1^m f(x)\,dx$	③ $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx - \int_1^m f(x)\,dx$
④ $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx - \int_1^m f(x)\,dx$	⑤ $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx + \int_0^m f(x)\,dx$
⑥ $\displaystyle\int_0^m f(x)\,dx + \int_1^m f(x)\,dx$	

$\boxed{\text{チ}}$，$\boxed{\text{ツ}}$ については，最も適当なものを，次の⓪～⑤のうちから一つずつ選べ．ただし，同じものを繰り返し選んでもよい．

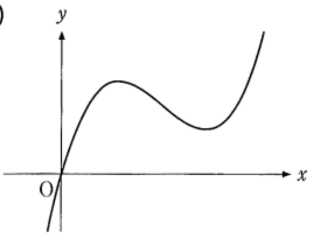
⓪



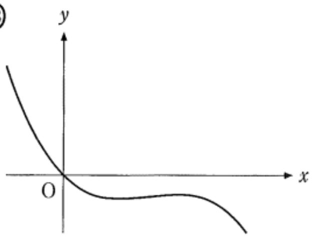
①



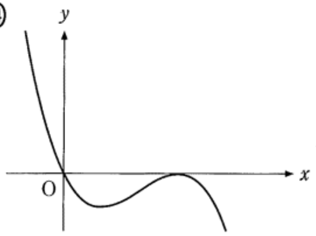
②



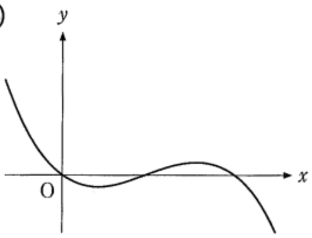
③



④



⑤



(3) 関数 $y=f(x)$ のグラフの特徴から関数 $y=S(x)$ のグラフの特徴を考えてみよう．

関数 $y=f(x)$ のグラフは直線 $x=$ $\boxed{テ}$ に関して対称であるから，すべての正の実数 p に対して

$$\int_{1-p}^{1} f(x)\,dx=\int_{m}^{\boxed{ト}} f(x)\,dx \qquad \cdots\cdots ①$$

が成り立ち，$M=$ $\boxed{テ}$ とおくと $0<q \leqq M-1$ であるすべての実数 q に対して

$$\int_{M-q}^{M}\{-f(x)\}\,dx=\int_{M}^{\boxed{ナ}}\{-f(x)\}\,dx \qquad \cdots\cdots ②$$

が成り立つことがわかる．すべての実数 $\alpha,\ \beta$ に対して

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x)\,dx=S(\beta)-S(\alpha)$$

が成り立つことに注意すれば，① と ② はそれぞれ

$$S(1-p)+S\left(\boxed{ト}\right)=\boxed{ニ}$$

$$2S(M)=\boxed{ヌ}$$

となる．

以上から，すべての正の実数 p に対して，2 点 $(1-p,\ S(1-p))$，$\left(\boxed{ト},\ S\left(\boxed{ト}\right)\right)$ を結ぶ線分の中点についての記述として，後の⓪～⑤ のうち，最も適当なものは $\boxed{ネ}$ である．

$\boxed{テ}$ の解答群

⓪ m	① $\dfrac{m}{2}$	② $m+1$	③ $\dfrac{m+1}{2}$

$\boxed{ト}$ の解答群

⓪ $1-p$	① p	② $1+p$
③ $m-p$	④ $m+p$	

$\boxed{ナ}$ の解答群

⓪ $M-q$	① M	② $M+q$
③ $M+m-q$	④ $M+m$	⑤ $M+m+q$

$\boxed{ニ}$ の解答群

⓪ $S(1)+S(m)$	① $S(1)+S(p)$	② $S(1)-S(m)$
③ $S(1)-S(p)$	④ $S(p)-S(m)$	⑤ $S(m)-S(p)$

$\boxed{\text{ヌ}}$ の解答群

⓪ $S(M-q)+S(M+m-q)$	① $S(M-q)+S(M+m)$
② $S(M-q)+S(M)$	③ $2S(M-q)$
④ $S(M+q)+S(M-q)$	⑤ $S(M+m+q)+S(M-q)$

$\boxed{\text{ネ}}$ の解答群

⓪ x 座標は p の値によらず一つに定まり，y 座標は p の値により変わる．

① x 座標は p の値により変わり，y 座標は p の値によらず一つに定まる．

② 中点は p の値によらず一つに定まり，関数 $y=S(x)$ のグラフ上にある．

③ 中点は p の値によらず一つに定まり，関数 $y=f(x)$ のグラフ上にある．

④ 中点は p の値によって動くが，つねに関数 $y=S(x)$ のグラフ上にある．

⑤ 中点は p の値によって動くが，つねに関数 $y=f(x)$ のグラフ上にある．

(24 共通テスト 本試験 II・IIB 2)

【答】

ア	イ	ウ	エ	オ	カ	キ	ク	ケ	コ	サ	シ	ス	セ	ソ	タ
3	2	9	6	9	2	6	1	5	2	2	2	3	0	5	1

チ	ツ	テ	ト	ナ	ニ	ヌ	ネ
1	2	3	4	2	0	4	2

【解答】

$$f(x)=3(x-1)(x-m)\ (m\text{ は } m>1 \text{ を満たす定数})$$

$$S(x)=\int_0^x f(t)\,dt$$

(1) $m=2$ のとき

$$\begin{aligned} f(x)&=3(x-1)(x-2)\\ &=3(x^2-3x+2) \end{aligned}$$

である．

(i) $$f'(x)=3(2x-3)$$

であるから．$f'(x)=0$ となる x の値は $x=\mathbf{\dfrac{3}{2}}$ である．　……(答)

(ii) $S(x)$ を計算すると

$$\begin{aligned} S(x)&=\int_0^x f(t)\,dt\\ &=\int_0^x \left(3t^2-\mathbf{9}t+\mathbf{6}\right)dt &&\text{……(答)}\\ &=\left[t^3-\frac{9}{2}t^2+6t\right]_0^x\\ &=x^3-\mathbf{\frac{9}{2}}x^2+\mathbf{6}x &&\text{……(答)} \end{aligned}$$

である．$S'(x)=f(x)=3(x-1)(x-2)$ であり，$S(x)$ の増減は下表となる．

x	$\cdots$	1	$\cdots$	2	$\cdots$
$S'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$S(x)$	$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$

$x=\mathbf{1}$ のとき，$S(x)$ は ……(答)

極大値 $S(1)=1-\dfrac{9}{2}+6=\boldsymbol{\dfrac{5}{2}}$ をとり ……(答)

$x=\mathbf{2}$ のとき，$S(x)$ は ……(答)

極小値 $S(2)=8-18+12=\mathbf{2}$ をとる ……(答)

ことがわかる．

(iii) $f(3)=S'(3)$ であるから，$f(3)$ は

関数 $\boldsymbol{y=S(x)}$ のグラフ上の点 $\boldsymbol{(3,\ S(3))}$ における接線の傾き (3) ……(答)

である．

- 各選択肢をみておく．まず，$f(3)=3(3-1)(3-2)=6$ である．

1 $S(3)=27-\dfrac{81}{2}+18=\dfrac{9}{2}\fallingdotseq f(3)$ である．

2 2 点 $(2,\ S(2))$，$(4,\ S(4))$ を通る直線の傾きは

$$\frac{S(4)-S(2)}{4-2}=\frac{4(16-18+6)-2}{2}=\frac{16-2}{2}=7\fallingdotseq f(3)$$

である．

3 2 点 $(0,\ 0)$，$(3,\ S(3))$ を通る直線の傾きは

$$\frac{S(3)-0}{3-0}=\frac{\frac{9}{2}}{3}=\frac{3}{2}\fallingdotseq f(3)\quad (\because\ S(3)\text{ は1で計算済み})$$

である．

4 関数 $y=f(x)$ のグラフ上の点 $(3,\ f(3))$ における接線の傾きは

$$f'(3)=3(6-3)=9\fallingdotseq f(3)$$

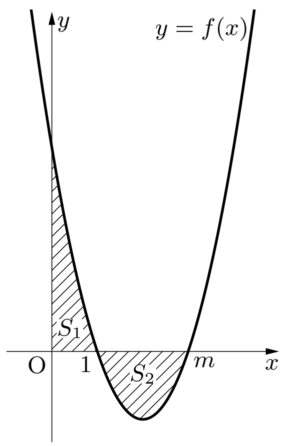
である．

(2) S_1，S_2 は右図のそれぞれ斜線部分の面積であり

$$S_1=\int_{\mathbf{0}}^{\mathbf{1}}\boldsymbol{f(x)\,dx}\qquad (0)\qquad \text{……(答)}$$

$$S_2=\int_{\mathbf{1}}^{\boldsymbol{m}}\boldsymbol{\{-f(x)\}\,dx}\qquad (5)\qquad \text{……(答)}$$

である．



$S_1=S_2$ となるのは

$$\int_0^1 f(x)\,dx=\int_1^m\{-f(x)\}\,dx$$

$$\int_0^1 f(x)\,dx+\int_1^m f(x)\,dx=0$$

$$\therefore\quad \int_{\mathbf{0}}^{\boldsymbol{m}}\boldsymbol{f(x)\,dx=0}\qquad (1)\qquad \text{……(答)}$$

のときである．

$y=S(x)$ は $S'(x)=f(x)=3(x-1)(x-m)$ $(m>1)$ より

$x=1$ で極大値，　$x=m$ で極小値

をとるから，$S_1 = S_2$ が成り立つような $f(x)$ に対する関数 $y = S(x) = \displaystyle\int_0^x f(x)\,dx$ は

$$x \geqq 0 \text{ のとき } S(x) \geqq 0 \text{ かつ } S(0) = 0,\ \text{極小値 } S(m) = 0$$

であることに注意すると，関数 $y = S(x)$ のグラフの概形は (1) である．　……(答)

また，$S_1 > S_2$ が成り立つような $f(x)$ は $\displaystyle\int_0^m f(x)\,dx > 0$ であり，$y = S(x)$ は

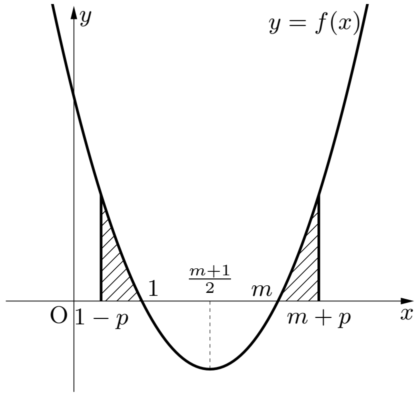
$$x \geqq 0 \text{ のとき } S(x) \geqq 0 \text{ かつ } S(0) = 0,\ \text{極小値 } S(m) > 0$$

であることに注意すると，関数 $y = S(x)$ のグラフの概形は (2) である．　……(答)

(3) $f(x) = 3(x-1)(x-m)$ (m は $m > 1$ を満たす定数) であるから，関数 $y = f(x)$ のグラフは下に凸な放物線であり，

$$\text{直線 } x = \boldsymbol{\frac{m+1}{2}} \text{ に関して対称} \quad (3)$$

……(答)



である．この対称性により，すべての正の実数 p に対して

$$\int_{1-p}^{1} f(x)\,dx = \int_m^{\boldsymbol{m+p}} f(x)\,dx$$

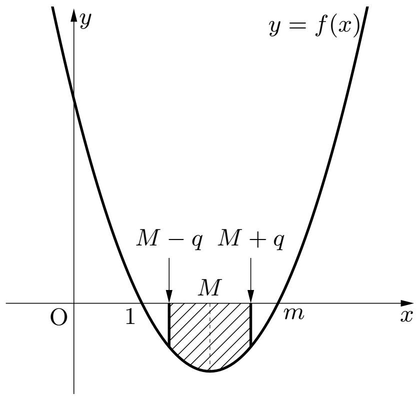
…… ①　(4)　……(答)

が成り立つ．

また，$M = \dfrac{m+1}{2}$ とおくと $0 < q \leqq M-1$ であるすべての実数 q に対して

$$\int_{M-q}^{M} \{-f(x)\}\,dx = \int_M^{\boldsymbol{M+q}} \{-f(x)\}\,dx$$

…… ②　(2)　……(答)



が成り立つことがわかる．

すべての実数 $\alpha,\ \beta$ に対して

$$\int_\alpha^\beta f(x)\,dx = \Big[S(x)\Big]_\alpha^\beta = S(\beta) - S(\alpha)$$

が成り立つことに注意すれば，

① は

$$S(1) - S(1-p) = S(m+p) - S(m)$$

$$\therefore\ S(1-p) + S(m+p) = \boldsymbol{S(1) + S(m)} \quad \cdots\cdots ①' \quad (0)$$

……(答)

② は

$$S(M) - S(M-q) = S(M+q) - S(M)$$

$$\therefore\ 2S(M) = \boldsymbol{S(M+q) + S(M-q)} \quad \cdots\cdots ②' \quad (4)$$

……(答)

となる．

以上から，すべての正の実数 p に対して，2 点 $(1-p,\ S(1-p))$，$(m+p,\ S(m+p))$ を

結ぶ線分の中点は

$$x\text{ 座標}：x = \frac{(1-p)+(m+p)}{2} = \frac{m+1}{2} = M$$

$$\begin{aligned} y\text{ 座標}：y &= \frac{S(1-p)+S(m+p)}{2} \\ &= \frac{S(1)+S(m)}{2} \quad (\because \text{①}') \\ &= \frac{1}{2}\left\{S\left(\frac{m+1}{2}-\frac{m-1}{2}\right)+S\left(\frac{m+1}{2}+\frac{m-1}{2}\right)\right\} \\ &= \frac{1}{2}\left\{S\left(M-\frac{m-1}{2}\right)+S\left(M+\frac{m-1}{2}\right)\right\} \\ &= S(M) \quad (\because \text{②}') \end{aligned}$$

すなわち，中点の座標は

$(M,\ S(M))$

であり，この中点についての記述として，$\boxed{\text{ネ}}$の解答群⓪〜⑤のうち，最も適当なものは

(②) である．　……(答)