a を 0 でない実数とする．C を $y=-x^3+x^2$ で表される曲線，ℓ を $y=a$ で表される直線とし，C と ℓ は共有点をちょうど 2 つもつとする．

(1) a の値を求めよ．
(2) C と ℓ の共有点の x 座標をすべて求めよ．
(3) C と ℓ で囲まれた図形の面積を求めよ．

(24 北海道大 文系 3)

【答】

(1) $a=\dfrac{4}{27}$
(2) $x=\dfrac{2}{3},-\dfrac{1}{3}$
(3) $\dfrac{1}{12}$

【解答】

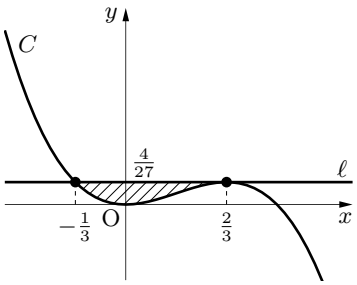
$$C: y=-x^3+x^2$$

(1) 微分すると

$$y'=-3x^2+2x=-x(3x-2)$$

であり，増減は下表となる．

x	$\cdots$	0	$\cdots$	$\frac{2}{3}$	$\cdots$
y'	$-$	0	$+$	0	$-$
y	↘	0	↗	$\frac{4}{27}$	↘



$\ell: y=a$ は x 軸と平行な直線であり，$a \neq 0$ のもとで C と ℓ がちょうど 2 つの共有点をもつ a の値は

$$\boldsymbol{a=\frac{4}{27}} \qquad \cdots\cdots(答)$$

である．

(2) C と ℓ の共有点の x 座標は

$$-x^3+x^2=\frac{4}{27}$$
$$27x^3-27x^2+4=0$$
$$(3x-2)^2(3x+1)=0$$
$$\therefore\ \boldsymbol{x=\frac{2}{3},\ -\frac{1}{3}} \qquad \cdots\cdots(答)$$

である．

(3) C と ℓ で囲まれた図形は上図の斜線部分であり，面積 S は

$$S=\int_{-\frac{1}{3}}^{\frac{2}{3}}\left\{\frac{4}{27}-(-x^3+x^2)\right\}dx=\int_{-\frac{1}{3}}^{\frac{2}{3}}\left(x+\frac{1}{3}\right)\left(x-\frac{2}{3}\right)^2dx$$
$$=\int_{-\frac{1}{3}}^{\frac{2}{3}}\left(x-\frac{2}{3}+1\right)\left(x-\frac{2}{3}\right)^2dx=\left[\frac{1}{4}\left(x-\frac{2}{3}\right)^4+\frac{1}{3}\left(x-\frac{2}{3}\right)^3\right]_{-\frac{1}{3}}^{\frac{2}{3}}$$
$$=-\frac{1}{4}+\frac{1}{3}$$
$$=\boldsymbol{\frac{1}{12}} \qquad \cdots\cdots(答)$$

である．