曲線 $y=|x^2-1|$ を C，直線 $y=2a(x+1)$ を ℓ とする．ただし，a は $0<a<1$ を満たす実数とする．

(1) 曲線 C と直線 ℓ の共有点の座標をすべて求めよ．

(2) 曲線 C と直線 ℓ で囲まれた 2 つの部分の面積が等しくなる a の値を求めよ．

(24 大阪大 文系 1)

【答】

(1) $(-1,\ 0)$, $(1-2a,\ 4a(1-a))$, $(1+2a,\ 4a(1+a))$

(2) $a=\sqrt[3]{2}-1$

【解答】

$$C : y=|x^2-1|$$

$$\ell : y=2a(x+1) \quad (0<a<1)$$

(1) 絶対値をはずすための場合分けをおこない，C と ℓ の共有点の座標を求める．

(i) $x \leqq -1,\ 1 \leqq x$ のとき

$$x^2-1=2a(x+1)$$
$$(x+1)(x-1-2a)=0$$
$$\therefore \quad x=-1,\ 1+2a$$

$1<1+2a<3$ にも注意すると，どちらも (i) の範囲を満たす．

座標は $(-1,\ 0)$, $(1+2a,\ 4a(1+a))$ である．

(ii) $-1 \leqq x \leqq 1$ のとき

$$-(x^2-1)=2a(x+1)$$
$$(x+1)(x-1+2a)=0$$
$$\therefore \quad x=-1,\ 1-2a$$

$-1<1-2a<1$ にも注意すると，どちらも (ii) の範囲を満たす．

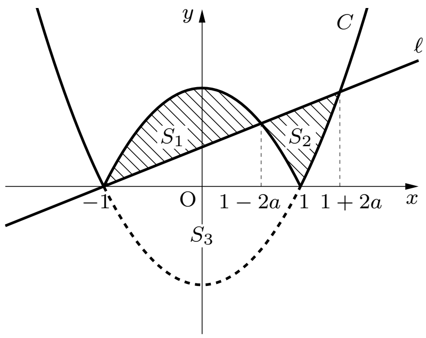
座標は $(-1,\ 0)$, $(1-2a,\ 4a(1-a))$ である．

(i)，(ii) より，共有点の座標のすべては

$$\boldsymbol{(-1,\ 0),\ (1-2a,\ 4a(1-a)),\ (1+2a,\ 4a(1+a))} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

である．

(2) C と ℓ で囲まれた 2 つの部分の面積を右図のようにそれぞれ S_1, S_2 とおき，C と ℓ と図の破線で囲まれた部分の面積を S_3 とおくと



$$S_1=S_2$$
$$\iff S_1+S_3=S_2+S_3$$

である．ここで

$$\begin{aligned} S_1+S_3 &= 2\int_{-1}^{1} -(x^2-1)\,dx \\ &= -2\int_{-1}^{1}(x+1)(x-1)\,dx \\ &= 2\times\frac{(1-(-1))^3}{6} \\ &= \frac{8}{3} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
S_2+S_3&=\int_{-1}^{1+2a}\{2a(x+1)-(x^2-1)\,dx\\
&=-\int_{-1}^{1+2a}(x+1)(x-1-2a)\,dx\\
&=\frac{\{1+2a-(-1)\}^3}{6}\\
&=\frac{4(1+a)^3}{3}
\end{aligned}
$$

であるから

$$\frac{8}{3}=\frac{4(1+a)^3}{3} \qquad \therefore \quad a=\sqrt[3]{2}-1$$

である．これは $1<\sqrt[3]{2}<2$ より $0<a<1$ を満たす．
よって

$$\boldsymbol{a=\sqrt[3]{2}-1} \qquad \cdots\cdots（答）$$

である．