正の実数 a に対して，関数

$$f(x)=ax$$

を考え，xy 平面上の直線 L を

$$L:y=f(x)$$

で定義する．

1) xy 平面上の 3 点 $\mathrm{P}(1,\ 2)$，点 $\mathrm{Q}(2,\ 4)$，点 $\mathrm{R}\left(\sqrt{5},\ \sqrt{5}\right)$ を考える．$x=1,\ 2,\ \sqrt{5}$ における直線 L の y 座標と点 P，Q，R の y 座標を用いて，

$$D=\{f(1)-2\}^2+\{f(2)-4\}^2+\{f(\sqrt{5})-\sqrt{5}\}^2$$

を定義する．

(1) D を a の多項式で表しなさい．

(2) D が最小値をとるときの a の値を求めなさい．また，D の最小値を求めなさい．

2) 関数

$$g(x)=\frac{x^2}{4}+\frac{3a^2}{4}$$

を用いて，曲線 C を

$$C:y=g(x)$$

で定義する．不等式 $0\leqq x\leqq 1$ の表す領域を U とし，曲線 C，直線 L，$x=0$，$x=1$ で囲まれた領域と領域 U の共通部分の面積を S とする．

(1) 直線 L と曲線 C の 2 つの交点の x 座標をそれぞれ a の式で表しなさい．

(2) 「(1) で求めた交点のうち 1 つの交点のみが領域 U 内にある」ための必要十分条件を a の不等式で表しなさい．

(3) 「(1) で求めたすべての交点が領域 U 内にある」ときの a の値に対して，面積 S は実数 t_0，t_1，t_2，t_3 を係数とした a の多項式 $t_3a^3+t_2a^2+t_1a+t_0$ となる．このとき，係数 t_0，t_1，t_2，t_3 の値をそれぞれ求めなさい．

(4) 面積 S が最小値をとるときの a の値を求め，その理由も示しなさい．

(24 帯広畜産大 3)

【答】

1) (1) $D=10a^2-30a+25$　(2) $a=\dfrac{3}{2}$ のとき，最小値 $\dfrac{5}{2}$

2) (1) $x=a,\ 3a$　(2) $\dfrac{1}{3}<a\leqq 1$　(3) $t_0=\dfrac{1}{12}$，$t_1=-\dfrac{1}{2}$，$t_2=\dfrac{3}{4}$，$t_3=\dfrac{2}{3}$

(4) $a=\dfrac{1}{4}$

【解答】

$$f(x)=ax,\quad L:y=f(x)$$

1) (1) 式を整理すると

$$\begin{aligned}D&=\{f(1)-2\}^2+\{f(2)-4\}^2+\{f(\sqrt{5})-\sqrt{5}\}^2\\&=(a-2)^2+(2a-4)^2+(\sqrt{5}a-\sqrt{5})^2\\&=(a^2-4a+4)+4(a^2-4a+4)+5(a^2-2a+1)\\&=\mathbf{10a^2-30a+25}\end{aligned}$$

……(答)

である．

(2) (1) の式は

$$D = 10\left(a - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{5}{2}$$

であり，D は

$$\boldsymbol{a = \frac{3}{2}} \textbf{のとき，最小値} \boldsymbol{\frac{5}{2}} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

をとる．

2) $$g(x) = \frac{x^2}{4} + \frac{3a^2}{4}, \quad C : y = g(x)$$

(1) 直線 L と曲線 C の 2 つの交点の x 座標は

$$\begin{aligned}
&ax = \frac{x^2}{4} + \frac{3a^2}{4} \\
&4ax = x^2 + 3a^2 \\
&x^2 - 4ax + 3a^2 = 0 \\
&(x-a)(x-3a) = 0 \\
\therefore\ &\boldsymbol{x = a,\ 3a} \qquad \cdots\cdots(\text{答})
\end{aligned}$$

である．

(2) $a > 0$ より $0 < a < 3a$ であり，「(1) で求めた交点のうち 1 つの交点のみが領域 $U = \{(x,\ y)\,|\,0 \leqq x \leqq 1\}$ 内にある」ための必要十分条件は

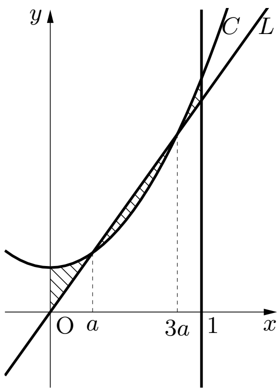
$$0 < a \leqq 1 < 3a \quad \text{すなわち} \quad \boldsymbol{\frac{1}{3} < a \leqq 1} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

である．

(3) 「(1) で求めたすべての交点が領域 U 内にある」ための a の条件は

$$0 < a < 3a \leqq 1 \quad \text{すなわち} \quad 0 < a \leqq \frac{1}{3}$$

である．このとき，曲線 C，直線 L，$x = 0$，$x = 1$ で囲まれた領域と領域 U の共通部分は下図の斜線部分である．



この部分の面積 S は

$$
\begin{aligned}
S &= \int_0^a \{g(x)-f(x)\}\,dx + \int_a^{3a} \{f(x)-g(x)\}\,dx + \int_{3a}^1 \{g(x)-f(x)\}\,dx \\
&= \int_0^a \frac{1}{4}(x-a)(x-3a)\,dx \\
&\qquad - \int_a^{3a} \frac{1}{4}(x-a)(x-3a)\,dx + \int_{3a}^1 \frac{1}{4}(x-a)(x-3a)\,dx \\
&= \int_0^a \frac{1}{4}\{(x-a)^2-2a(x-a)\}\,dx \\
&\qquad - \int_a^{3a} \frac{1}{4}(x-a)(x-3a)\,dx + \int_{3a}^1 \frac{1}{4}\{(x-3a)^2+2a(x-3a)\}\,dx \\
&= \frac{1}{4}\left[\frac{(x-a)^3}{3} - 2a\frac{(x-a)^2}{2}\right]_0^a \\
&\qquad + \frac{1}{4}\times\frac{(3a-a)^3}{6} + \frac{1}{4}\left[\frac{(x-3a)^3}{3} + 2a\frac{(x-3a)^2}{2}\right]_{3a}^1 \\
&= \frac{1}{4}\left(\frac{a^3}{3}+a^3\right) + \frac{a^3}{3} + \frac{1}{4}\left\{\frac{(1-3a)^3}{3} + a(1-3a)^2\right\} \\
&= \frac{a^3}{3} + \frac{a^3}{3} + \frac{1}{4}\left(\frac{1}{3} - 2a + 3a^2\right) \\
&= \frac{2}{3}a^3 + \frac{3}{4}a^2 - \frac{1}{2}a + \frac{1}{12}
\end{aligned}
$$

となる．$S = t_3a^3 + t_2a^2 + t_1a + t_0$ と係数を比較すると

$$\boldsymbol{t_0 = \frac{1}{12},\ t_1 = -\frac{1}{2},\ t_2 = \frac{3}{4},\ t_3 = \frac{2}{3}} \qquad \cdots\cdots(答)$$

である．

(4) (2)(3) を参考に $a\ (>0)$ の範囲で場合分けすると，S は

$$
S = \begin{cases}
\dfrac{2}{3}a^3 + \dfrac{3}{4}a^2 - \dfrac{1}{2}a + \dfrac{1}{12} & \left(0 < a \leqq \dfrac{1}{3}\text{ のとき}\right) \\
\displaystyle\int_0^a \{g(x)-f(x)\}\,dx + \int_a^1 \{f(x)-g(x)\}\,dx & \left(\dfrac{1}{3} < a \leqq 1\text{ のとき}\right) \\
\displaystyle\int_0^1 \{g(x)-f(x)\}\,dx & (1 < a\text{ のとき})
\end{cases}
$$

となる．

(i) $0 < a \leqq \dfrac{1}{3}$ のとき，S を a で微分すると

$$S' = 2a^2 + \frac{3}{2}a - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}(4a-1)(a+1)$$

$0 < a \leqq \dfrac{1}{3}$ における S の増減は下表となる．

a	(0)	$\cdots$	$\frac{1}{4}$	$\cdots$	$\frac{1}{3}$
S'		$-$	0	$+$	
S		$\searrow$		$\nearrow$	

よって，(i) において S は $a = \dfrac{1}{4}$ において極小かつ最小となる．

(ii) $\dfrac{1}{3} < a \leqq 1$ のとき

$$\begin{aligned}
S &= \int_0^a \frac{1}{4}(x-a)(x-3a)\,dx - \int_a^1 \frac{1}{4}(x-a)(x-3a)\,dx \\
&= \int_0^a \frac{1}{4}\{(x-a)^2 - 2a(x-a)\}\,dx - \int_a^1 \frac{1}{4}\{(x-a)^2 - 2a(x-a)\}\,dx \\
&= \frac{1}{4}\left[\frac{(x-a)^3}{3} - a(x-a)^2\right]_0^a - \frac{1}{4}\left[\frac{(x-a)^3}{3} - a(x-a)^2\right]_a^1 \\
&= \frac{1}{4}\left(\frac{a^3}{3} + a^3\right) - \frac{1}{4}\left\{\frac{(1-a)^3}{3} - a(1-a)^2\right\} \\
&= \frac{1}{3}a^3 + \frac{1}{12}(a^3 - 3a^2 + 3a - 1) + \frac{1}{4}a(a^2 - 2a + 1) \\
&= \frac{2}{3}a^3 - \frac{3}{4}a^2 + \frac{1}{2}a - \frac{1}{12}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
S' &= 2a^2 - \frac{3}{2}a + \frac{1}{2} \\
&= 2\left(a - \frac{3}{8}\right)^2 + \frac{7}{32} > 0
\end{aligned}$$

(ii) の区間で S は単調増加な関数である．

(iii) $a > 1$ のとき

$$\begin{aligned}
S &= \int_0^1 \frac{1}{4}(x-a)(x-3a)\,dx \\
&= \frac{1}{4}\left[\frac{(x-a)^3}{3} - a(x-a)^2\right]_0^1 \\
&= \frac{1}{4}\left\{\frac{(1-a)^3 - (-a)^3}{3} - a\{(1-a)^2 - a^2\}\right\} \\
&= \frac{1}{4}\left\{\frac{1 - 3a + 3a^2}{3} - a(1-2a)\right\} \\
&= \frac{3}{4}a^2 - \frac{1}{2}a + \frac{1}{12}
\end{aligned}$$

$$S' = \frac{3}{2}a - \frac{1}{2} > 0 \quad (\because\ a > 1)$$

(iii) の区間で S は単調増加な関数である．

以上 (i)，(ii)，(iii) より，S が最小となるときの a の値は

$$\boldsymbol{a = \frac{1}{4}} \qquad \cdots\cdots(答)$$

である．