座標平面上で，放物線 $C: y = ax^2+bx+c$ が 2 点 $\mathrm{P}(\cos\theta,\ \sin\theta)$，$\mathrm{Q}(-\cos\theta,\ \sin\theta)$ を通り，点 P と点 Q のそれぞれにおいて円 $x^2+y^2=1$ と共通の接線を持っている．ただし，$0^\circ < \theta < 90^\circ$ とする．

(1) $a,\ b,\ c$ を $s = \sin\theta$ を用いて表せ．
(2) 放物線 C と x 軸で囲まれた図形の面積 A を s を用いて表せ．
(3) $A \geqq \sqrt{3}$ を示せ．

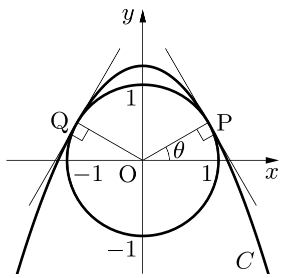
(24 東京大 文 1)

【答】

(1) $a = -\dfrac{1}{2s},\ b = 0,\ c = \dfrac{1+s^2}{2s}$
(2) $A = \dfrac{2}{3s}(1+s^2)^{\frac{3}{2}}$
(3) 略

【解答】

$$C: y = ax^2+bx+c$$



(1) C が $\mathrm{P}(\cos\theta,\ \sin\theta)$，$\mathrm{Q}(-\cos\theta,\ \sin\theta)$ を通るから

$$(*)\begin{cases}\sin\theta = a\cos^2\theta + b\cos\theta + c & \cdots\cdots ① \\ \sin\theta = a\cos^2\theta - b\cos\theta + c & \cdots\cdots ②\end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} ①+② : 2\sin\theta = 2a\cos^2\theta + 2c \\ ①-② : 0 = 2b\cos\theta \end{cases}$$

$0^\circ < \theta < 90^\circ$ より $\cos\theta \fallingdotseq 0$ である．また，$s = \sin\theta$ とおくと

$$(*) \iff \begin{cases} c = s - a(1-s^2) \\ \boldsymbol{b = 0} \end{cases} \qquad \cdots\cdots(答)$$

となる．

このとき $y = ax^2+c$ であり，$y' = 2ax$ であるから，P における C の接線の傾きは $2a\cos\theta$ である．C と円 $x^2+y^2=1$ は P において共通の接線を持っているから，P における C の接線と直線 OP は直交する．

$$2a\cos\theta\cdot\tan\theta = -1$$
$$\therefore\quad a = -\frac{1}{2a\sin\theta} = -\frac{1}{2s}$$

同じく，Q における C の接線と直線 OP も直交するから

$$2a(-\cos\theta)\cdot\tan(\pi-\theta) = -1$$
$$\therefore\quad a = -\frac{1}{2a\sin\theta} = -\frac{1}{2s}$$

であり

$$\boldsymbol{a = -\frac{1}{2s}} \qquad \cdots\cdots(答)$$

である．したがって

$$\boldsymbol{c} = s + \frac{1}{2s}(1-s^2) = \boldsymbol{\frac{1+s^2}{2s}} \qquad \cdots\cdots(答)$$

である．

(2) (1) より

$$C : y = -\frac{1}{2s}x^2 + \frac{1+s^2}{2s}$$

であり，C と x 軸の交点の x 座標は $x = \pm\sqrt{1+s^2}$ である．C と x 軸で囲まれた図形の面積 A は

$$\begin{aligned} A &= \int_{-\sqrt{1+s^2}}^{\sqrt{1+s^2}} -\frac{1}{2s}(x+\sqrt{1+s^2})(x-\sqrt{1+s^2})\,dx \\ &= \frac{1}{2s}\cdot\frac{1}{6}(2\sqrt{1+s^2})^3 \\ &= \boldsymbol{\frac{2}{3s}(1+s^2)^{\frac{3}{2}}} \end{aligned}$$ ……(答)

である．

(3) $s > 0$ $(0 < s < 1)$ より $A = \dfrac{2}{3}\sqrt{\dfrac{(1+s^2)^3}{s^2}}$ である．$t = s^2$ $(0 < t < 1)$ とおき，示すべき不等式を同値変形すると

$$A \geqq \sqrt{3} \iff \frac{2}{3}\sqrt{\frac{(1+t)^3}{t}} \geqq \sqrt{3} \iff 4(1+t)^3 \geqq 27t$$

となる．ここで

$$\begin{aligned} 4(1+t)^3 - 27t &= 4t^3 + 12t^2 - 15t + 4 \\ &= (t+4)(4t^2 - 4t + 1) \\ &= (t+4)(2t-1)^2 \\ &\geqq 0 \quad (\because\ 0 < t < 1) \end{aligned}$$

等号が成立するのは $t = \dfrac{1}{2}$ のときである．

よって，$A \geqq \sqrt{3}$ が成り立ち，$s = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ のとき，等号が成立する．　…… (証明終わり)

- 因数分解に気づかないときは，$y = 4t^3 + 12t^2 - 15t + 4$ を微分して $0 < t < 1$ での増減を調べてもよい．
- 相加平均・相乗平均の関係を利用することもできる．

$$\begin{aligned} A &= \frac{2}{3}\sqrt{\frac{(1+t)^3}{t}} = \frac{2}{3}\left(\frac{1+t}{t^{\frac{1}{3}}}\right)^{\frac{3}{2}} \\ &= \frac{2}{3}\left(\frac{1}{2t^{\frac{1}{3}}} + \frac{1}{2t^{\frac{1}{3}}} + t^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}} \\ &\geqq \frac{2}{3}\left(3\sqrt[3]{\frac{1}{2t^{\frac{1}{3}}}\cdot\frac{1}{2t^{\frac{1}{3}}}\cdot t^{\frac{2}{3}}}\right)^{\frac{3}{2}} \quad (\because\ 3\text{ 文字の相加平均・相乗平均の関係}) \\ &= \frac{2}{3}\cdot 3^{\frac{3}{2}}\left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \sqrt{3} \end{aligned}$$

  等号は $\dfrac{1}{2t^{\frac{1}{3}}} = t^{\frac{2}{3}}$ すなわち $t = \dfrac{1}{2}$ のとき成り立つ．

- A のとりうる値の範囲を調べてもよい．
  $t = s^2$ $(0 < s < 1)$ とおくと

$$A = \frac{2}{3}\sqrt{\frac{(1+t)^3}{t}}\ (0 < t < 1)$$

  であるから，$k = \dfrac{(1+t)^3}{t}$ $(0 < t < 1)$ のとりうる値の範囲を求める．
  分数関数の微分は数学 III の範囲となるので，次のように考える．

$t \fallingdotseq 0$ $(0 < t < 1)$ であるから

$$k = \frac{(1+t)^3}{t} \iff kt = (1+t)^3$$

であり，$y = kt$ と $y = (1+t)^3$ が $0 < t < 1$ の範囲で共有点をもつための k の条件を求める．

$$y' = 3(1+t)^2$$

であり，$y = (1+t)^3$ 上の点 $(p,\ (1+p)^3)$ における接線の方程式は

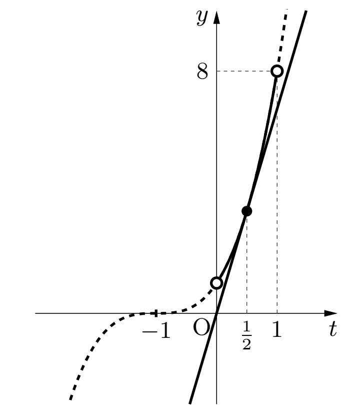
$$y = 3(1+p)^2(x-p) + (1+p)^3$$

である．これが原点 $(0,\ 0)$ を通るとき

$$0 = 3(1+p)^2(-p) + (1+p)^3$$

$$\therefore\quad (1+p)^2(1-2p) = 0$$

$$\therefore\quad p = -1,\ \frac{1}{2}$$



$p = \dfrac{1}{2}$ のとき

$$k = 3\left(1+\frac{1}{2}\right)^2 = 3\left(\frac{3}{2}\right)^2$$

であり，$0 < t < 1$ のとき k は

$$3\left(\frac{3}{2}\right)^2 \text{ 以上のすべての実数をとる}$$

から，A のとりうる値の範囲は

$$\frac{2}{3}\sqrt{3\left(\frac{3}{2}\right)^2} = \sqrt{3} \text{ 以上のすべての実数}$$

である．よって

$$A \geqq \sqrt{3}$$

が示された．