a を正の実数とする．関数 $y = ax^2 + a^3$ のグラフを C_1，関数 $y = ax^2$ のグラフを C_2 とする．このとき，次の問いに答えよ．

(1) C_1 上の点 $\mathrm{P}(p,\ ap^2 + a^3)$ における接線を ℓ とする．ℓ の方程式を求めよ．

(2) ℓ は，C_2 と 2 点 A，B で交わる．P は線分 AB の中点であることを示せ．

(3) C_2 と ℓ が囲む図形の面積を S とする．S を a を用いて表せ．

(24 東京海洋大 生命・資源 2)

【答】

(1) $y = 2apx - ap^2 + a^3$

(2) 略

(3) $S = \dfrac{4}{3}a^4$

【解答】

$$C_1 : y = ax^2 + a^3,$$
$$C_2 : y = ax^2$$

(1) $(ax^2 + a^3)' = 2ax$ より，C_1 上の点 $\mathrm{P}(p,\ ap^2 + a^3)$ における接線 ℓ の方程式は

$$y = 2ap(x - p) + ap^2 + a^3$$
$$\therefore\quad \boldsymbol{y = 2apx - ap^2 + a^3} \qquad \cdots\cdots(答)$$

である．

(2) ℓ と C_2 の交点 A，B の x 座標は

$$ax^2 = 2apx - ap^2 + a^3$$
$$x^2 - 2px + p^2 - a^2 = 0 \quad (\because\ a \fallingdotseq 0)$$
$$\{x - (p + a)\}\{x - (p - a)\} = 0$$
$$\therefore\quad x = p + a,\ p - a$$

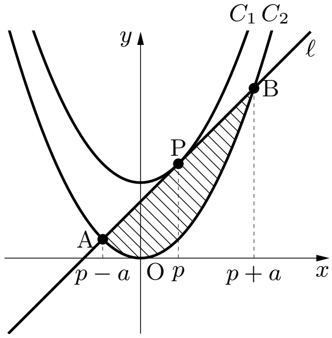
であり，線分 AB の中点の x 座標は

$$\frac{(p + a) + (p - a)}{2} = p$$

である．これは点 P の x 座標と一致する．

ℓ は C_1 上の点 P における接線であるから，3 点 P，A，B は ℓ 上にあり，点 P は線分 AB の中点である．　$\cdots\cdots$ (証明終わり)

(3) C_2 と ℓ が囲む図形は右図の斜線部分である．求める面積 S は



$$\begin{aligned} S &= \int_{p-a}^{p+a} \{(2apx - ap^2 + a^3) - ax^2\}\,dx \\ &= -a\int_{p-a}^{p+a} \{x - (p - a)\}\{x - (p + a)\}\,dx \\ &= a \cdot \frac{\{(p + a) - (p - a)\}^3}{6} \\ &= \boldsymbol{\frac{4}{3}a^4} \qquad \cdots\cdots(答) \end{aligned}$$

である．