a を正の実数とし，$f(x)=x^2-2ax+4a^2$ とする．O を原点とする xy 平面上の放物線 $C: y=f(x)$ の頂点を A とする．直線 OA と C の交点のうち A と異なるものを $\mathrm{P}(p,\ f(p))$ とし，O から C へ引いた接線の接点を $\mathrm{Q}(q,\ f(q))$ とする．ただし，$q>0$ とする．

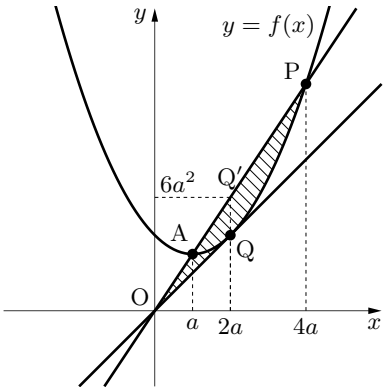
(1) $p,\ q$ の値を a を用いて表せ．また，$p>q$ であることを示せ．
(2) 放物線 C の $q \leqq x \leqq p$ の部分，線分 OP，および線分 OQ で囲まれた図形の面積を S とおく．S を a を用いて表せ．
(3) (2) の S に対し，$S=\dfrac{2}{3}$ となるときの a の値を求めよ．

(24 東北大 理 1 文 1)

【答】
(1) $p=2a,\ q=4a$，証明は略
(2) $S=\dfrac{16}{3}a^3$
(3) $a=\dfrac{1}{2}$

【解答】

$$f(x)=x^2-2ax+4a^2$$



(1) $f(x)$ を平方完成すると

$$f(x)=(x-a)^2+3a^2$$

となる．頂点 A の座標は

$$\mathrm{A}\left(a,\ 3a^2\right)$$

であり，$a \neq 0$ より直線 OA の方程式は

$$y=3ax$$

である．$y=f(x)$ と $y=3ax$ を連立すると

$$x^2-2ax+4a^2=3ax$$
$$x^2-5ax+4a^2=0$$
$$(x-a)(x-4a)=0$$

直線 OA と C の交点のうち A と異なるものが P であるから，P の x 座標 p は

$$\boldsymbol{p=4a}$$ ……(答)

である．

つぎに，$f'(x)=2x-2a$ であるから，$\mathrm{Q}(q,\ f(q))$ における放物線の接線の方程式は

$$y=(2q-2a)(x-q)+q^2-2aq+4a^2$$

である．これが原点を通る条件は

$$0=(2q-2a)(-q)+q^2-2aq+4a^2$$
$$q^2-4a^2=0$$
$$(q+2a)(q-2a)=0$$

$a>0$ であり，$q>0$ であるから

$$\boldsymbol{q=2a}$$ ……(答)

である．

また，$a>0$ であるから，$4a>2a$，すなわち $p>q$ である． …… (証明終わり)

(2) 与えられた図形は図の斜線部分である．直線 OA と直線 $x=2a$ の交点を Q′ とおくと，Q′ の座標は $(2a,\ 6a^2)$ である．Q$(2a,\ 4a^2)$ であるから

$$\begin{aligned} S &= \triangle \mathrm{OQQ'} + \int_{2a}^{4a} \{3ax - (x^2 - 2ax + 4a^2)\}\,dx \\ &= \frac{1}{2}2a^2 \cdot 2a + \left[-\frac{x^3}{3} + 5a\frac{x^2}{2} - 4a^2x \right]_{2a}^{4a} \\ &= 2a^3 + \left(-\frac{56}{3}a^3 + 30a^3 - 8a^3 \right) \\ &= 2a^3 + \frac{10}{3}a^3 \\ &= \boldsymbol{\frac{16}{3}a^3} \end{aligned}$$

……(答)

である．

- P，Q から x 軸に下ろした垂線の足をそれぞれ P_x，Q_x とおくと

$$\begin{aligned} S &= \triangle \mathrm{OPP}_x - \triangle \mathrm{OQQ}_x - \int_{2a}^{4a} (x^2 - 2ax + 4a^2)\,dx \\ &= \frac{1}{2} \cdot 4a \cdot 12a^2 - \frac{1}{2} \cdot 2a \cdot 4a^2 - \left[\frac{x^3}{3} - ax^2 + 4a^2x \right]_{2a}^{4a} \\ &= 24a^3 - 4a^3 - \left(\frac{56}{3}a^3 - 12a^3 + 8a^3 \right) \\ &= \frac{16}{3}a^3 \end{aligned}$$

である．

(3) (2) より $S = \dfrac{2}{3}$ となる a の値は

$$\frac{16}{3}a^3 = \frac{2}{3} \qquad \therefore \quad a^3 = \frac{1}{8}$$

$a > 0$ より

$$\boldsymbol{a = \frac{1}{2}}$$

……(答)

である．