

すべての実数 x について、等式 $f(x) + \int_0^x tf'(t) dt = x^3 - 3x^2 - 9x + 7$ を満たす
2次関数 $f(x)$ を求めよ.

(24 金沢工大 B 1(10))

【答】 $f(x) = \frac{3}{2}x^2 - 9x + 7$

【解答】

$$f(x) + \int_0^x tf'(t) dt = x^3 - 3x^2 - 9x + 7 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

① の辺々を x で微分すると

$$\begin{aligned} f'(x) + xf'(x) &= 3x^2 - 6x - 9 \\ (x+1)f'(x) &= 3(x+1)(x-3) \end{aligned}$$

すべて実数 x について成り立つから

$$\begin{aligned} f'(x) &= 3(x-3) \\ f(x) &= 3\left(\frac{x^2}{2} - 3x\right) + C \quad (C \text{ は積分定数}) \quad \cdots \cdots \textcircled{2} \end{aligned}$$

① に $x=0$ を代入すると

$$f(0) = 7 \quad \cdots \cdots \textcircled{3}$$

を得る. ②, ③より

$$C = 7$$

よって

$$f(x) = \frac{3}{2}x^2 - 9x + 7 \quad \cdots \cdots (\text{答})$$

である.