$a,\ b,\ c$ を実数，m を整数とする．3 次関数 $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ が次の 2 つの条件を満たすとき，$a,\ b,\ c,\ m$ の値を求めよ．

- すべての実数 p に対して $\displaystyle\int_p^{p+1} f(x)\,dx=(p-m)^3$ が成り立つ．
- $f(x)$ は $-2<x<-1$ に極値をもつ．

(24 一橋大 後 経済 2)

【答】 $a=\dfrac{9}{2},\ b=\dfrac{13}{2},\ c=3,\ m=-2$

【解答】

第 1 の条件「すべての実数 p に対して $\displaystyle\int_p^{p+1} f(x)\,dx=(p-m)^3$ が成り立つ」 $\cdots\cdots(*)$ について

$$\begin{aligned}\int_p^{p+1} f(x)\,dx &= \int_p^{p+1}(x^3+ax^2+bx+c)\,dx\\ &= \left[\frac{x^4}{4}+a\frac{x^3}{3}+b\frac{x^2}{2}+cx\right]_p^{p+1}\\ &= \frac{1}{4}\{(p+1)^4-p^4\}+\frac{a}{3}\{(p+1)^3-p^3\}\\ &\qquad\qquad +\frac{b}{2}\{(p+1)^2-p^2\}+c\{(p+1)-p\}\\ &= \frac{1}{4}(4p^3+6p^2+4p+1)+\frac{a}{3}(3p^2+3p+1)+\frac{b}{2}(2p+1)+c\\ &= p^3+\left(a+\frac{3}{2}\right)p^2+(a+b+1)\,p+\frac{a}{3}+\frac{b}{2}+c+\frac{1}{4}\end{aligned}$$

また

$$(p-m)^3=p^3-3mp^2+3m^2p-m^3$$

であるから

$$\begin{aligned}(*)\ &\Longleftrightarrow \begin{cases} a+\dfrac{3}{2}=-3m\\ a+b+1=3m^2\\ \dfrac{a}{3}+\dfrac{b}{2}+c+\dfrac{1}{4}=-m^3\end{cases}\\ &\Longleftrightarrow \begin{cases} a=-3m-\dfrac{3}{2} & \cdots\cdots ①\\ b=3m^2+3m+\dfrac{1}{2} & \cdots\cdots ②\\ c=-m^3-\dfrac{3}{2}m^2-\dfrac{1}{2}m & \cdots\cdots ③\end{cases}\end{aligned}$$

を得る．さらに，条件 2 も考える．

$$\begin{aligned}f'(x)&=3x^2+2ax+b\\ &=3x^2-2\left(3m+\frac{3}{2}\right)x+3m^2+3m+\frac{1}{2}\quad (\because\ ①,\ ②)\\ &=3x^2-(6m+3)x+3m^2+3m+\frac{1}{2}\\ &=3\left(x-m-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}\end{aligned}$$

であるから，$y=f'(x)$ は下に凸な放物線で軸の方程式が $x=m+\dfrac{1}{2}$ である．

$$f'\left(m+\frac{1}{2}\right)=-\frac{1}{4}<0 \quad かつ \quad f'(m)=f'(m+1)=\frac{1}{2}>0$$

であるから，第 2 の条件を満たす条件は，m, $m+1$ が整数であることに注意すると

$$\boldsymbol{m=-2} \qquad \cdots\cdots(答)$$

である．よって，①, ②, ③ より

$$\boldsymbol{a}=-3\cdot(-2)-\frac{3}{2}=\boldsymbol{\frac{9}{2}} \qquad \cdots\cdots(答)$$

$$\boldsymbol{b}=3\cdot(-2)^2+3\cdot(-2)+\frac{1}{2}=\boldsymbol{\frac{13}{2}} \qquad \cdots\cdots(答)$$

$$\boldsymbol{c}=-(-2)^3-\frac{3}{2}\cdot(-2)^2-\frac{1}{2}\cdot(-2)=\boldsymbol{3} \qquad \cdots\cdots(答)$$

である．