関数 $f(x)=|x^2-x-t|$ について，次の問いに答えよ．ただし，t は実数とする．

(1) $f\left(-\dfrac{1}{2}\right)=f\left(\dfrac{1}{2}\right)=f\left(\dfrac{3}{2}\right)$ となるときの t の値を求めよ．

(2) $f(x)=|x^2-x-t|$ $\left(-\dfrac{1}{2}\leqq x\leqq\dfrac{3}{2}\right)$ の最大値を $M(t)$ で表すとき，t の関数 $M(t)$ を求めよ．

(3) $M(t)$ は，(2) で求めた t の関数とする．x の関数

$$g(x)=\int_0^x 3t\left(M(t)-\frac{3}{4}\right)dt$$

を求めよ．

(4) (3) で求めた x の関数 $g(x)$ の極値を求め，$y=g(x)$ のグラフをかけ．

(24 宇都宮大 データ経営 (理・文) 1 B)

【答】

(1) $t=\dfrac{1}{4}$

(2) $M(t)=\begin{cases}\dfrac{3}{4}-t & \left(t\leqq\dfrac{1}{4}\ \text{のとき}\right)\\ t+\dfrac{1}{4} & \left(t\geqq\dfrac{1}{4}\ \text{のとき}\right)\end{cases}$

(3) $g(x)=\begin{cases}-x^3 & \left(x\leqq\dfrac{1}{4}\text{のとき}\right)\\ x^3-\dfrac{3}{4}x^2+\dfrac{1}{64} & \left(x\geqq\dfrac{1}{4}\text{のとき}\right)\end{cases}$

(4) $x=\dfrac{1}{2}$ のとき，極小値 $-\dfrac{3}{64}$．図は略.

【解答】

$$f(x)=|x^2-x-t|$$

(1)
$$f\left(-\frac{1}{2}\right)=\left|\frac{1}{4}-\left(-\frac{1}{2}\right)-t\right|=\left|\frac{3}{4}-t\right|,$$
$$f\left(\frac{1}{2}\right)=\left|\frac{1}{4}-\frac{1}{2}-t\right|=\left|-\frac{1}{4}-t\right|=\left|t+\frac{1}{4}\right|,$$
$$f\left(\frac{3}{2}\right)=\left|\frac{9}{4}-\frac{3}{2}-t\right|=\left|\frac{3}{4}-t\right|$$

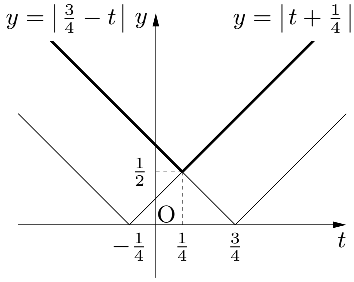
であるから，$f\left(-\dfrac{1}{2}\right)=f\left(\dfrac{1}{2}\right)=f\left(\dfrac{3}{2}\right)$ となる t の値は

$$\left|\frac{3}{4}-t\right|=\left|t+\frac{1}{4}\right|$$
$$\frac{3}{4}-t=t+\frac{1}{4}\ \text{または}\ \frac{3}{4}-t=-\left(t+\frac{1}{2}\right)$$
$$2t=\frac{2}{4}\ (\text{第 2 式は成立しない})$$
$$\therefore\quad \boldsymbol{t=\frac{1}{4}}$$
……(答)

(2)
$$f(x)=\left|\left(x-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}-t\right|\quad\left(-\frac{1}{2}\leqq x\leqq\frac{3}{2}\right)$$

軸の方程式は $x=\dfrac{1}{2}$ であり，$f(x)$ が最大となる x の値は端点 $x=-\dfrac{1}{2}$，$\dfrac{3}{2}$，または頂点となる $x=\dfrac{1}{2}$ のときである．軸に関する対称性より $f\left(-\dfrac{1}{2}\right)=f\left(\dfrac{3}{2}\right)$ であるから，$f\left(\dfrac{1}{2}\right)$ と $f\left(\dfrac{3}{2}\right)$ の大小を比較すればよい．

$$\begin{aligned} M(t) &= \max\left\{ f\left(\frac{1}{2}\right),\ f\left(\frac{3}{2}\right) \right\} \\ &= \max\left\{ \left|t+\frac{1}{4}\right|,\ \left|\frac{3}{4}-t\right| \right\} \\ &= \begin{cases} \boldsymbol{\dfrac{3}{4}-t} & \left(\boldsymbol{t \leqq \dfrac{1}{4}}\ \textbf{のとき}\right) \\ \boldsymbol{t+\dfrac{1}{4}} & \left(\boldsymbol{t \geqq \dfrac{1}{4}}\ \textbf{のとき}\right) \end{cases} \end{aligned}$$ ……(答)



である．

(3) $t=\dfrac{1}{4}$ が積分区間に含まれるか否かで場合分けする．

(i) $x \leqq \dfrac{1}{4}$ のとき

$$g(x)=\int_0^x 3t\left\{\left(\frac{3}{4}-t\right)-\frac{3}{4}\right\}dt=\int_0^x(-3t^2)\,dt=\Big[-t^3\Big]_0^x=-x^3$$

(ii) $x \geqq \dfrac{1}{4}$ のとき

$$\begin{aligned} g(x) &= \int_0^{\frac{1}{4}} 3t\left\{\left(\frac{3}{4}-t\right)-\frac{3}{4}\right\}dt+\int_{\frac{1}{4}}^x 3t\left\{\left(t+\frac{1}{4}\right)-\frac{3}{4}\right\}dt \\ &= \int_0^{\frac{1}{4}}(-3t^2)\,dt+\int_{\frac{1}{4}}^x\left(3t^2-\frac{3}{2}t\right)dt \\ &= \Big[-t^3\Big]_0^{\frac{1}{4}}+\Big[t^3-\frac{3}{4}t^2\Big]_{\frac{1}{4}}^x \\ &= -\frac{1}{4^3}+\left(x^3-\frac{3}{4}x^2\right)-\left(\frac{1}{4^3}-\frac{3}{4^3}\right) \\ &= x^3-\frac{3}{4}x^2+\frac{1}{64} \end{aligned}$$

以上 (i)，(ii) より

$$\boldsymbol{g(x)=\begin{cases} -x^3 & \left(x \leqq \dfrac{1}{4}\textbf{のとき}\right) \\ x^3-\dfrac{3}{4}x^2+\dfrac{1}{64} & \left(x \geqq \dfrac{1}{4}\textbf{のとき}\right) \end{cases}}$$ ……(答)

である．

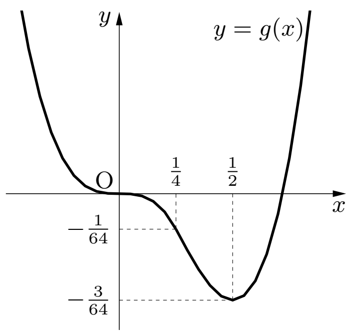
(4) $g(x)$ を微分すると

$$g'(x)=\begin{cases} -3x^2 & \left(x<\dfrac{1}{4}\text{のとき}\right) \\ 3x^2-\dfrac{3}{2}x=3x\left(x-\dfrac{1}{2}\right) & \left(x>\dfrac{1}{4}\text{のとき}\right) \end{cases}$$

$$\lim_{x\to\frac{1}{4}\pm 0} g'(x)=-\frac{3}{16}$$

であり，$g(x)$ の増減は下表となる．

x	$\cdots$	$\frac{1}{4}$	$\cdots$	$\frac{1}{2}$	$\cdots$
$g'(x)$	$-$	$-\frac{3}{16}$	$-$	0	$+$
$g(x)$	↘	$-\frac{1}{64}$	↘		↗



$g(x)$ は $x=\dfrac{1}{2}$ のとき

極小値 $g\left(\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{1}{8}-\dfrac{3}{16}+\dfrac{1}{64}=-\dfrac{3}{64}$

をとり，$y=g(x)$ のグラフは右図となる．