自然数 k に対して，$a_k = 2^{\sqrt{k}}$ とする．n を自然数とし，a_k の整数部分が n 桁であるような k の個数を N_n とする．また，a_k の整数部分が n 桁であり，その最高位の数字が 1 であるような k の個数を L_n とする．次を求めよ．

$$\lim_{n\to\infty} \frac{L_n}{N_n}$$

ただし，例えば実数 2345.678 の整数部分 2345 は 4 桁で，最高位の数字は 2 である．

(24 京都大 理系 6)

【答】 $\displaystyle \lim_{n\to\infty} \frac{L_n}{N_n} = \log_{10} 2$

【解答】

$$a_k = 2^{\sqrt{k}}$$

与えられた条件を不等式で表す．

$$\begin{aligned} & a_k\text{の整数部分が } n \text{ 桁である} \\ \iff & 10^{n-1} \leqq 2^{\sqrt{k}} < 10^n \\ \iff & n-1 \leqq \sqrt{k}\log_{10} 2 < n \end{aligned}$$

$\log_{10} 2 > 0$ であり $\dfrac{n-1}{\log_{10} 2} \geqq 0$ であるから

$$\iff \left(\frac{n-1}{\log_{10} 2}\right)^2 \leqq k < \left(\frac{n}{\log_{10} 2}\right)^2 \qquad \cdots\cdots ①$$

実数 x に対し $[x]$ を x を超えない最大な整数とおくと，① を満たす自然数 k の個数 N_n は，$n \geqq 2$ のとき $\left(\dfrac{n-1}{\log_{10} 2}\right)^2$，$\left(\dfrac{n}{\log_{10} 2}\right)^2$ は整数でないから

$$N_n = \left[\left(\frac{n}{\log_{10} 2}\right)^2\right] - \left[\left(\frac{n-1}{\log_{10} 2}\right)^2\right]$$

である．

$$\begin{aligned} & a_k\text{の整数部分が } n \text{ 桁であり，その最高位の数字が 1 である} \\ \iff & 10^{n-1} \leqq 2^{\sqrt{k}} < 2\cdot 10^{n-1} \\ \iff & n-1 \leqq \sqrt{k}\log_{10} 2 < (n-1) + \log_{10} 2 \end{aligned}$$

$\log_{10} 2 > 0$ であり $\dfrac{n-1}{\log_{10} 2} \geqq 0$ であるから

$$\iff \left(\frac{n-1}{\log_{10} 2}\right)^2 \leqq k < \left(\frac{n-1}{\log_{10} 2} + 1\right)^2 \qquad \cdots\cdots ②$$

② を満たす自然数 k の個数 L_n は，$n \geqq 2$ のとき $\left(\dfrac{n-1}{\log_{10} 2}\right)^2$，$\left(\dfrac{n-1}{\log_{10} 2} + 1\right)^2$ は整数でないから

$$L_n = \left[\left(\frac{n-1}{\log_{10} 2} + 1\right)^2\right] - \left[\left(\frac{n-1}{\log_{10} 2}\right)^2\right]$$

である．$n \geqq 2$ のとき

$$\frac{L_n}{N_n} = \frac{\left[\left(\dfrac{n-1}{\log_{10} 2}+1\right)^2\right] - \left[\left(\dfrac{n-1}{\log_{10} 2}\right)^2\right]}{\left[\left(\dfrac{n}{\log_{10} 2}\right)^2\right] - \left[\left(\dfrac{n-1}{\log_{10} 2}\right)^2\right]}$$

である．

$$[x] \leqq x < [x]+1 \quad \text{すなわち} \quad x-1 < [x] \leqq x$$

が成り立つことに注意すると

$$\frac{\left\{\left(\dfrac{n-1}{\log_{10} 2}+1\right)^2 - 1\right\} - \left(\dfrac{n-1}{\log_{10} 2}\right)^2}{\left(\dfrac{n}{\log_{10} 2}\right)^2 - \left\{\left(\dfrac{n-1}{\log_{10} 2}\right)^2 - 1\right\}} < \frac{L_n}{N_n} < \frac{\left(\dfrac{n-1}{\log_{10} 2}+1\right)^2 - \left\{\left(\dfrac{n-1}{\log_{10} 2}\right)^2 - 1\right\}}{\left\{\left(\dfrac{n}{\log_{10} 2}\right)^2 - 1\right\} - \left(\dfrac{n-1}{\log_{10} 2}\right)^2}$$

が成り立つ．ここで

$$\begin{aligned}
(\text{左辺}) &= \frac{(n-1+\log_{10} 2)^2 - (\log_{10} 2)^2 - (n-1)^2}{n^2 - (n-1)^2 + (\log_{10} 2)^2} \\
&= \frac{2(n-1)\log_{10} 2}{2n-1+(\log_{10} 2)^2} = \frac{2\left(1-\dfrac{1}{n}\right)\log_{10} 2}{2-\dfrac{1}{n}+\dfrac{(\log_{10} 2)^2}{n}} \\
&\underset{(n\to\infty)}{\longrightarrow} \frac{2\log_{10} 2}{2} = \log_{10} 2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(\text{右辺}) &= \frac{(n-1+\log_{10} 2)^2 - (n-1)^2 - (\log_{10} 2)^2}{n^2 - (\log_{10} 2)^2 - (n-1)^2} \\
&= \frac{2(n-1)\log_{10} 2}{2n-1-(\log_{10} 2)^2} = \frac{2\left(1-\dfrac{1}{n}\right)\log_{10} 2}{2-\dfrac{1}{n}-\dfrac{(\log_{10} 2)^2}{n}} \\
&\underset{(n\to\infty)}{\longrightarrow} \frac{2\log_{10} 2}{2} = \log_{10} 2
\end{aligned}$$

はさみうちの原理より

$$\boldsymbol{\lim_{n\to\infty} \frac{L_n}{N_n} = \log_{10} 2} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

である．

- 不等式 $x-1 < [x] \leqq x$ を用いず，少し大雑把に範囲を絞ってみる．

$$N_n = \left[\left(\frac{n}{\log_{10} 2}\right)^2\right] - \left[\left(\frac{n-1}{\log_{10} 2}\right)^2\right] \text{ より}$$

$$\left\{\left(\frac{n}{\log_{10} 2}\right)^2 - 1\right\} - \left\{\left(\frac{n-1}{\log_{10} 2}\right)^2 + 1\right\} \leqq N_n \leqq \left\{\left(\frac{n}{\log_{10} 2}\right)^2 + 1\right\} - \left\{\left(\frac{n-1}{\log_{10} 2}\right)^2 - 1\right\}$$

$$\therefore \quad \left(\frac{n}{\log_{10} 2}\right)^2 - \left(\frac{n-1}{\log_{10} 2}\right)^2 - 2 \leqq N_n \leqq \left(\frac{n}{\log_{10} 2}\right)^2 - \left(\frac{n-1}{\log_{10} 2}\right)^2 + 2$$

$$\therefore \quad \frac{2n-1}{(\log_{10} 2)^2} - 2 \leqq N_n \leqq \frac{2n-1}{(\log_{10} 2)^2} + 2$$

同じく，$L_n = \left[\left(\dfrac{n-1}{\log_{10}2}+1\right)^2\right] - \left[\left(\dfrac{n-1}{\log_{10}2}\right)^2\right]$ に対しても

$$\left(\frac{n-1}{\log_{10}2}+1\right)^2-\left(\frac{n-1}{\log_{10}2}\right)^2-2 \leqq L_n \leqq \left(\frac{n-1}{\log_{10}2}+1\right)^2-\left(\frac{n-1}{\log_{10}2}\right)^2+2$$

$$\therefore \quad \frac{2(n-1)}{\log_{10}2}-1 \leqq L_n \leqq \frac{2(n-1)}{\log_{10}2}+3$$

したがって

$$\frac{\dfrac{2(n-1)}{\log_{10}2}-1}{\dfrac{2n-1}{(\log_{10}2)^2}+2} \leqq \frac{L_n}{N_n} \leqq \frac{\dfrac{2(n-1)}{\log_{10}2}+3}{\dfrac{2n-1}{(\log_{10}2)^2}-2}$$

である．ここで

$$(\text{左辺}) = \frac{2(n-1)\log_{10}2-(\log_{10}2)^2}{2n-1+2(\log_{10}2)^2} = \frac{2\left(1-\dfrac{1}{n}\right)\log_{10}2-\dfrac{(\log_{10}2)^2}{n}}{2-\dfrac{1}{n}+\dfrac{2(\log_{10}2)^2}{n}}$$

$$\underset{(n\to\infty)}{\longrightarrow} \frac{2\log_{10}2-0}{2-0+0} = \log_{10}2$$

$$(\text{右辺}) = \frac{2(n-1)\log_{10}2+3(\log_{10}2)^2}{2n-1-2(\log_{10}2)^2} = \frac{2\left(1-\dfrac{1}{n}\right)\log_{10}2+3\dfrac{(\log_{10}2)^2}{n}}{2-\dfrac{1}{n}+\dfrac{2(\log_{10}2)^2}{n}}$$

$$\underset{(n\to\infty)}{\longrightarrow} \frac{2\log_{10}2+0}{2-0+0} = \log_{10}2$$

はさみうちの原理より

$$\lim_{n\to\infty}\frac{L_n}{N_n} = \log_{10}2$$

である．