実数全体で定義された関数

$$f(x) = \frac{2x-2}{x^2-2x+2}$$

について，次の問に答えよ．

(1) $f(x)$ が極大となる x の値を求めよ．

(2) 次の数列 $\{a_n\}$ が収束するように実数 k の値を定め，その極限値を求めよ．

$$a_n = k\log(n+1) - \int_2^{n+1} f(x)\,dx \quad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

ただし，$\log(n+1)$ は $n+1$ の自然対数である．

(24 北海道大 後 理・工 1)

【答】

(1) $x = 2$

(2) $k = 2$，極限値 $\log 2$

【解答】

$$f(x) = \frac{2x-2}{x^2-2x+2}$$

(1) (分母) $= (x-1)^2 + 1 \fallingdotseq 0$ であり，$f(x)$ はすべての実数で微分可能である．

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{2(x^2-2x+2)-(2x-2)(2x-2)}{(x^2-2x+2)^2} \\ &= \frac{2(x^2-2x+2)-(4x^2-8x+4)}{(x^2-2x+2)^2} \\ &= \frac{-2x^2+4x}{(x^2-2x+2)^2} \\ &= \frac{-2x(x-2)}{(x^2-2x+2)^2} \end{aligned}$$

$f(x)$ の増減は下表となる．

x	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$

よって，極大となる x の値は

$$\boldsymbol{x = 2} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

である．

(2)
$$a_n = k\log(n+1) - \int_2^{n+1} f(x)\,dx \quad (n \geqq 1)$$

ここで

$$\begin{aligned} \int_2^{n+1} f(x)\,dx &= \int_2^{n+1} \frac{2x-2}{x^2-2x+2}\,dx \\ &= \int_2^{n+1} \frac{(x^2-2x+2)'}{x^2-2x+2}\,dx \\ &= \Big[\log|x^2-2x+2|\Big]_2^{n+1} \\ &= \log\{(n+1)^2-2(n+1)+2\} - \log 2 \\ &= \log(n^2+1) - \log 2 \end{aligned}$$

であるから

$$\begin{aligned} a_n &= k\log(n+1) - \log(n^2+1) + \log 2 \\ &= \log\frac{(n+1)^k}{n^2+1} + \log 2 \end{aligned}$$

である．$k=2$ のとき

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^2}{n^2+1} = \lim_{n\to\infty}\frac{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^2}{1+\dfrac{1}{n^2}} = 1$$

である．また

$$\frac{(n+1)^k}{n^2+1} = \frac{(n+1)^2}{n^2+1}(n+1)^{k-2} \underset{(n\to\infty)}{\longrightarrow} \begin{cases} 1\cdot\infty = \infty & (k>2\text{ のとき}) \\ 1\cdot 0 = 0 & (k<2\text{ のとき}) \end{cases}$$

であるから

$$\lim_{n\to\infty}\log\frac{(n+1)^k}{n^2+1} = \begin{cases} \infty & (k>2\text{ のとき}) \\ 0 & (k=2\text{ のとき}) \\ -\infty & (k<2\text{ のとき}) \end{cases}$$

である．

　よって，数列 $\{a_n\}$ が収束するような k の値は

$$\boldsymbol{k=2} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

であり，その極限値は

$$\mathbf{log\,2} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

である．