m を 0 以上の整数，n を 1 以上の整数，t を $0<t<1$ を満たす実数とし，$F(m,\ n)$ を

$$F(m,\ n)=\sum_{k=m}^{m+n-1}{}_k\mathrm{C}_m t^k$$

で定める．

(1) p を整数とする．

$$A=\frac{(t-1)F(m+1,\ n)+tF(m,\ n)}{t^p}$$

が t によらない値となるような p と，そのときの A を求めよ．

(2) 極限 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}F(m,\ n)$ が収束することを示し，その極限値を求めよ．ただし，$0<s<1$ のとき $\displaystyle\lim_{k\to\infty}k^m s^k=0$ であることは用いてよい．

(24 千葉大 9)

【答】

(1) $p=m+n+1$，$A={}_{m+n}\mathrm{C}_{m+1}$

(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}F(m,\ n)=\frac{t^m}{(1-t)^{m+1}}$

【解答】

$$F(m,\ n)=\sum_{k=m}^{m+n-1}{}_k\mathrm{C}_m t^k \quad (m \text{ は 0 以上の整数，} n \text{ は 1 以上の整数，} 0<t<1)$$

(1) $\displaystyle F(m+1,\ n)=\sum_{k=m+1}^{m+n}{}_k\mathrm{C}_{m+1}t^k=\sum_{k=m}^{m+n-1}{}_{k+1}\mathrm{C}_{m+1}t^{k+1}$ であるから

$$\begin{aligned}(A\text{ の分子})&=(t-1)\sum_{k=m}^{m+n-1}{}_{k+1}\mathrm{C}_{m+1}t^{k+1}+t\sum_{k=m}^{m+n-1}{}_k\mathrm{C}_m t^k\\&=\sum_{k=m}^{m+n-1}\left\{{}_{k+1}\mathrm{C}_{m+1}t^{k+2}-\left({}_{k+1}\mathrm{C}_{m+1}-{}_k\mathrm{C}_m\right)t^{k+1}\right\}\end{aligned}$$

$k\geqq m+1$ のとき ${}_k\mathrm{C}_m+{}_k\mathrm{C}_{m+1}={}_{k+1}\mathrm{C}_{m+1}$ が成り立つ．$\sum$ から $k=m$ のときを分けると

$$\begin{aligned}(A\text{ の分子})&=t^{m+2}+\sum_{k=m+1}^{m+n-1}\left({}_{k+1}\mathrm{C}_{m+1}t^{k+2}-{}_k\mathrm{C}_{m+1}t^{k+1}\right)\\&=t^{m+2}+\left({}_{m+n}\mathrm{C}_{m+1}t^{m+n+1}-{}_{m+1}\mathrm{C}_{m+1}t^{m+2}\right)\\&={}_{m+n}\mathrm{C}_{m+1}t^{m+n+1}\end{aligned}$$

となる．よって

$$A=\frac{{}_{m+n}\mathrm{C}_{m+1}t^{m+n+1}}{t^p}$$

が t によらない値となるのは

$$\boldsymbol{p=m+n+1} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

のときであり，このときの A の値は

$$\boldsymbol{A={}_{m+n}\mathrm{C}_{m+1}} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

である．

(2) (1) により得られた漸化式

$$(t-1)F(m+1,\ n)+tF(m,\ n)={}_{m+n}\mathrm{C}_{m+1}t^{m+n+1}$$

を解いて，$F(m,\ n)$ を求める．

$$F(m+1,\ n)=\frac{t}{1-t}F(m,\ n)-\frac{1}{1-t}{}_{m+n}\mathrm{C}_{m+1}t^{m+n+1}$$

辺々を $\left(\dfrac{t}{1-t}\right)^{m+1}$ $(\neq 0)$ で割ると

$$\left(\frac{1-t}{t}\right)^{m+1}F(m+1,\ n)=\left(\frac{1-t}{t}\right)^{m}F(m,\ n)-{}_{m+n}\mathrm{C}_{m+1}(1-t)^m t^n$$

であり，$m \geqq 1$ のとき

$$\left(\frac{1-t}{t}\right)^{m}F(m,\ n)=\left(\frac{1-t}{t}\right)^{0}F(0,\ n)-\sum_{k=0}^{m-1}{}_{k+n}\mathrm{C}_{k+1}(1-t)^k t^n$$

$$\therefore\quad F(m,\ n)=\left(\frac{t}{1-t}\right)^{m}\left\{F(0,\ n)-\sum_{k=0}^{m-1}{}_{k+n}\mathrm{C}_{k+1}(1-t)^k t^n\right\}$$

である．ここで

$$F(0,\ n)=\sum_{k=0}^{n-1}{}_{k}\mathrm{C}_{0}t^k=1+t+t^2+\cdots+t^{n-1}=\frac{1-t^n}{1-t} \qquad \cdots\cdots ①$$

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{m-1}{}_{k+n}\mathrm{C}_{k+1}(1-t)^k t^n &= t^n\sum_{k=0}^{m-1}\frac{(k+n)!}{(n-1)!(k+1)!}(1-t)^k\\ &= t^n\sum_{k=0}^{m-1}\frac{(k+n)(k+n-1)\cdot\cdots\cdot n}{(k+1)!}(1-t)^k\end{aligned}$$

$0<t<1$ より $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1-t^n}{1-t}=\frac{1}{1-t}$ である．

また，$\displaystyle\sum_{k=0}^{m-1}\frac{(k+n)(k+n-1)\cdot\cdots\cdot n}{(k+1)!}(1-t)^k$ は n の $k+1$ 次の多項式であるから，$\displaystyle\lim_{k\to\infty}k^m s^k=0$ $(0<s<1)$ であり $\displaystyle\lim_{n\to\infty}(n$ の $k+1$ 次の多項式$)t^n=0$ である．したがって

$$\lim_{n\to\infty}F(m,\ n)=\left(\frac{t}{1-t}\right)^m\left(\frac{1}{1-t}-0\right)=\frac{t^m}{(1-t)^{m+1}} \qquad \cdots\cdots ②$$

である．

また，$m=0$ のとき，$F(0,\ n)=\dfrac{1-t^n}{1-t}$ $(\because$ ①$)$ であるから

$$\lim_{n\to\infty}F(0,\ n)=\frac{1}{1-t} \quad (\because\ 0<t<1)$$

であり，$m=0$ のときも ② は成立する．

以上より

$$\lim_{n\to\infty}F(m,\ n)=\boldsymbol{\frac{t^m}{(1-t)^{m+1}}} \qquad \cdots\cdots(答)$$

である．