無限級数 $1+\dfrac{1}{1!}+\dfrac{1}{2!}+\dfrac{1}{3!}+\dfrac{1}{4!}+\dfrac{1}{5!}+\dfrac{1}{6!}+\cdots+\dfrac{1}{n!}+\cdots$ は自然対数の底 e に収束することが知られている．このことを用いて，無限級数 $1+\dfrac{3}{2!}+\dfrac{5}{4!}+\dfrac{7}{6!}+\dfrac{9}{8!}+\dfrac{11}{10!}+\cdots+\dfrac{2n+1}{(2n)!}+\cdots$ の値を求めなさい．ただし，n は正の整数とする．

(24 公立千歳科技大 理工 1(5))

【答】 e

【解答】

$$1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}+\frac{1}{5!}+\frac{1}{6!}+\cdots+\frac{1}{n!}+\cdots=e$$

すなわち，第 n 項までの部分和 $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}$ を S_n とおくとき

$$\lim_{n\to\infty}S_n=e \qquad \cdots\cdots (*)$$

が成り立つことを認める．

無限級数 $1+\dfrac{3}{2!}+\dfrac{5}{4!}+\dfrac{7}{6!}+\dfrac{9}{8!}+\dfrac{11}{10!}+\cdots+\dfrac{2n+1}{(2n)!}+\cdots$ の第 n 項までの部分和を T_n とおくと

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}T_n&=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{2k+1}{(2k)!}\\&=\lim_{n\to\infty}\left\{1+\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{(2k-1)!}+\frac{1}{(2k)!}\right)\right\}\\&=\lim_{n\to\infty}\left\{1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}+\cdots+\frac{1}{(2n-1)!}+\frac{1}{(2n)!}\right\}\\&=\lim_{n\to\infty}S_{2n}\end{aligned}$$

である．ここで

$$\lim_{nto\infty}S_{2n}=\lim_{n\to\infty}\left\{S_n+\frac{1}{(n+1)!}+\frac{1}{(n+2)!}+\cdots+\frac{1}{(2n)!}\right\}=e \quad (\because\ (*))$$

であるから

$$\lim_{n\to\infty}T_n=e$$

すなわち

$$1+\frac{3}{2!}+\frac{5}{4!}+\frac{7}{6!}+\frac{9}{8!}+\frac{11}{10!}+\cdots+\frac{2n+1}{(2n)!}+\cdots=\boldsymbol{e} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

である．