以下の問いに答えよ．

(1) すべての自然数 n に対して

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}}{k}=\begin{cases}\displaystyle\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{m+k} & (n\text{ が偶数 }(n=2m)\text{ のとき}),\\ \displaystyle\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{m-1+k} & (n\text{ が奇数 }(n=2m-1)\text{ のとき})\end{cases}$$

を証明せよ．

(2) (1) の左辺において $n\to\infty$ として，区分求積法を用いて無限級数

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\cdots$$

の和の値を求めよ．

(3) (2) の無限級数の項の順序を入れ替えてできる無限級数

$$1\underbrace{-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}}_{2\text{ 項}}+\frac{1}{3}\underbrace{-\frac{1}{6}-\frac{1}{8}}_{2\text{ 項}}+\frac{1}{5}\underbrace{-\frac{1}{10}-\frac{1}{12}}_{2\text{ 項}}+\cdots$$

の和の値を求めよ．

(4) 上の結果からどのようなことが考察されるか.「有限」と「無限」という言葉を用いて述べよ．

(24 浜松医大 3)

【答】

(1) 略

(2) $\log 2$

(3) $\dfrac{1}{2}\log 2$

(4) 略

【解答】

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}}{k}=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots+\frac{(-1)^{n-1}}{n}\quad\text{とおく．}$$

(1) $n=2m$ のとき

$$\begin{aligned}S_{2m}&=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2m-1}-\frac{1}{2m}\\&=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2m-1}+\frac{1}{2m}-2\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2m}\right)\\&=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2m-1}+\frac{1}{2m}-\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{m}\right)\\&=\frac{1}{m+1}+\frac{1}{m+2}+\cdots+\frac{1}{2m}\\&=\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{m+k}\qquad\cdots\cdots ①\end{aligned}$$

である．

$n=2m-1$ のとき

$$\begin{aligned}S_{2m-1}&=S_{2m}+\frac{1}{2m}\\&=\left(\frac{1}{m+1}+\frac{1}{m+2}+\cdots+\frac{1}{2m-1}+\frac{1}{2m}\right)+\frac{1}{2m}\\&=\frac{1}{m}+\frac{1}{m+1}+\frac{1}{m+2}+\cdots+\frac{1}{2m-1}\\&=\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{m-1+k}\qquad\cdots\cdots ②\end{aligned}$$

である．

①，② より与えられた等式は成り立つ． …… (証明終わり)

(2) (1) により

$$\begin{aligned}\lim_{m\to\infty} S_{2m} &= \lim_{m\to\infty}\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{m+k}\\ &= \lim_{m\to\infty}\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{1+\dfrac{k}{m}}\cdot\frac{1}{m}\\ &= \int_0^1 \frac{1}{1+x}\,dx \quad (\because\ \text{区分求積法})\\ &= \Big[\log|1+x|\Big]_0^1\\ &= \log 2 \qquad \cdots\cdots ③\end{aligned}$$

であり，また

$$\begin{aligned}\lim_{m\to\infty} S_{2m-1} &= \lim_{m\to\infty}\left(S_{2m}+\frac{1}{2m}\right)\\ &= \log 2 + 0\\ &= \log 2 \qquad \cdots\cdots ④\end{aligned}$$

である．③，④ より

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \log 2$$

$$\therefore\quad 1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\cdots = \mathbf{\log 2} \qquad \cdots\cdots(答)$$

である．

(3) 与えられた無限級数の第 n 項までの部分和を T_n とおく．

$$\begin{aligned}T_{3m} &= \sum_{k=1}^{m}\left(\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{4k-2}-\frac{1}{4k}\right)\\ &= \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{m}\left(\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2k}\right)\\ &= \frac{1}{2}S_{2m}\end{aligned}$$

$$\therefore\quad \lim_{m\to\infty} T_{3m} = \frac{1}{2}\log 2 \qquad \cdots\cdots ⑤$$

である．また

$$\lim_{m\to\infty} T_{3m-1} = \lim_{m\to\infty}\left(S_{3m}+\frac{1}{4m}\right) = \frac{1}{2}\log 2 \qquad \cdots\cdots ⑥$$

$$\lim_{m\to\infty} T_{3m-2} = \lim_{m\to\infty}\left(S_{3m}+\frac{1}{4m-2}+\frac{1}{4m}\right) = \frac{1}{2}\log 2 \qquad \cdots\cdots ⑦$$

である．⑤，⑥，⑦ より

$$\lim_{n\to\infty} T_n = \frac{1}{2}\log 2$$

$$\therefore\quad 1-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{3}-\frac{1}{6}-\frac{1}{8}+\frac{1}{5}-\frac{1}{10}-\frac{1}{12}+\cdots = \mathbf{\frac{1}{2}\log 2} \qquad \cdots\cdots(答)$$

である．

(4) ある数列とその順序を入れ替えた数列を考えるとき，項数が有限である場合はその和は一致するが，項数が無限である場合はその和が一致するとは限らない． ……(答)