n は自然数とし，a は $0 < a \leqq 1$ を満たす定数とする．$I_n = \dfrac{1}{n!}\displaystyle\int_0^a (a-x)^n e^x\,dx$ とおく．ただし，e は自然対数の底である．

(1) I_1 を求めよ．

(2) 極限 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} I_n$ を求めよ．

(3) I_{n+1} を I_n を用いて表せ．

(4) (3) までの結果を用いて，無限級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{n!}$ の和を求めよ．

(24 群馬大 医 5)

【答】

(1) $I_1 = e^a - a - 1$

(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} I_n = 0$

(3) $I_{n+1} = I_n - \dfrac{a^{n+1}}{(n+1)!}$

(4) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{n!} = e^a - 1$

【解答】

$$I_n = \frac{1}{n!}\int_0^a (a-x)^n e^x\,dx \quad (0 < a \leqq 1)$$

(1) 部分積分法を用いると

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_0^a (a-x)e^x\,dx \\ &= \Big[(a-x)e^x\Big]_0^a - \int_0^a (-1)e^x\,dx \\ &= -a + \Big[e^x\Big]_0^a \\ &= -a + (e^a - 1) \\ &= \boldsymbol{e^a - a - 1} \end{aligned} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

である

(2) a は $0 < a \leqq 1$ を満たす定数であるから，$0 \leqq x \leqq a$ のとき

$$\begin{aligned} &0 \leqq a - x \leqq a \leqq 1 \\ \therefore\ \ &0 \leqq (a-x)^n \leqq 1 \\ \therefore\ \ &0 \leqq (a-x)^n e^x \leqq e^x \quad (\because\ e^x > 0) \end{aligned}$$

であるから

$$\begin{aligned} &\int_0^a 0\,dx \leqq \int_0^a (a-x)^n e^x\,dx \leqq \int_0^a e^x\,dx \\ \therefore\ \ &0 \leqq \frac{1}{n!}\int_0^a (a-x)^n e^x\,dx \leqq \frac{1}{n!}\Big[e^x\Big]_0^a \\ \therefore\ \ &0 \leqq I_n \leqq \frac{e^a - 1}{n!} \underset{(n\to\infty)}{\longrightarrow} 0 \end{aligned}$$

が成立する．はさみうちの原理により

$$\boldsymbol{\lim_{n\to\infty} I_n = 0} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

である．

(3) 部分積分法を用いると

$$\begin{aligned}
I_{n+1} &= \frac{1}{(n+1)!}\int_0^a (a-x)^{n+1}e^x\,dx \\
&= \frac{1}{(n+1)!}\left\{\Big[(a-x)^{n+1}e^x\Big]_0^a - \int_0^a (-1)(n+1)(a-x)^n e^x\,dx\right\} \\
&= \frac{1}{(n+1)!}\left\{-a^{n+1} + (n+1)\int_0^a (a-x)^n e^x\,dx\right\} \\
&= -\frac{a^{n+1}}{(n+1)!} + \frac{1}{n!}\int_0^a (a-x)^n e^x\,dx
\end{aligned}$$

よって

$$\boldsymbol{I_{n+1} = I_n - \frac{a^{n+1}}{(n+1)!}} \qquad \cdots\cdots(答)$$

が成り立つ.

(4) (3) の結果より，$n \geqq 2$ のとき

$$\begin{aligned}
I_n &= I_1 - \sum_{k=1}^{n-1}\frac{a^{k+1}}{(k+1)!} \\
&= (e^a - a - 1) - \sum_{k=2}^{n}\frac{a^k}{k!} \\
&= (e^a - a - 1) - \left(-a + \sum_{k=1}^{n}\frac{a^k}{k!}\right) \\
&= (e^a - 1) - \sum_{k=1}^{n}\frac{a^k}{k!}
\end{aligned}$$

よって

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{\infty}\frac{a^k}{k!} &= \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{a^k}{k!} = \lim_{n\to\infty}\{(e^a-1) - I_n\} \\
&= \boldsymbol{e^a - 1} \quad (\because\ (2)) \qquad \cdots\cdots(答)
\end{aligned}$$

である.