数列 $\{a_n\}$ の初項から第 n 項までの和 S_n が $S_n = n - \dfrac{1}{2}a_n$ を満たすとする．

(1) a_{n+1} を a_n を用いて表せ．
(2) 数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ．
(3) 数列 $\{a_n\}$ の極限を求めよ．

(24 室蘭工大 3)

【答】

(1) $a_{n+1} = \dfrac{1}{3}a_n + \dfrac{2}{3}$
(2) $a_n = 1 - \left(\dfrac{1}{3}\right)^n$
(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = 1$

【解答】

$$S_n = n - \frac{1}{2}a_n \qquad \cdots\cdots ①$$

(1) $a_{n+1} = S_{n+1} - S_n$ であるから

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= \left(n+1-\frac{1}{2}a_{n+1}\right) - \left(n - \frac{1}{2}a_n\right) \\ &= 1 - \frac{1}{2}a_{n+1} + \frac{1}{2}a_n \end{aligned}$$

であり．これを整理すると

$$\frac{3}{2}a_{n+1} = \frac{1}{2}a_n + 1$$

$$\therefore \quad \boldsymbol{a_{n+1} = \frac{1}{3}a_n + \frac{2}{3}} \qquad \cdots\cdots ② \qquad \cdots\cdots(答)$$

である．

(2) ② に対し $\alpha = \dfrac{1}{3}\alpha + \dfrac{2}{3}$ …… ②′ を解くと $\alpha = 1$ であり，②，②′ の辺々を引くと

$$a_{n+1} - 1 = \frac{1}{3}(a_n - 1)$$

を得る．数列 $\{a_n - 1\}$ は初項 $a_1 - 1$，公比 $\dfrac{1}{3}$ の等比数列である．ここで，① において $n = 1$ とおくと，$S_1 = a_1$ であるから

$$a_1 = 1 - \frac{1}{2}a_1 \qquad \therefore \quad a_1 = \frac{2}{3}$$

である．したがって，初項は $a_1 - 1 = \dfrac{2}{3} - 1 = -\dfrac{1}{3}$ である．

よって

$$a_n - 1 = -\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$$

$$\therefore \quad \boldsymbol{a_n = 1 - \left(\frac{1}{3}\right)^n} \qquad \cdots\cdots(答)$$

である．

(3) (2) より

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\left\{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^n\right\} = \boldsymbol{1} \qquad \cdots\cdots(答)$$

である．