n 個の異なる色を用意する．立方体の各面にいずれかの色を塗る．各面にどの色を塗るかは同様に確からしいとする．辺を共有するどの二つの面にも異なる色が塗られる確率を p_n とする．次の問いに答えよ．

(1) p_4 を求めよ．

(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} p_n$ を求めよ．

(24 京都大 理系 1)

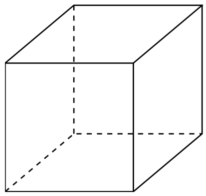
【答】

(1) $\dfrac{3}{128}$

(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} p_n = 1$

【解答】

立方体を固定し，各面を「上, 下，前，後，左，右」として区別する．
ただし，組 {上下}，{前後}，{左右} は向かい合う 2 面の組である．



(1) 立方体の 6 面を 4 色で塗り分ける方法は 4^6 通りあり，これらは同様に確からしい．

このうち，条件

「辺を共有するどの二つの面にも異なる色を塗る」…… $(*)$

ことができるのは 3 色または 4 色を用いるときである．

(i) 立方体の 6 面を 3 色で $(*)$ を満たすように塗り分けるには，4 色から 3 色を選び，向かい合う面の組 {上下}，{前後}，{左右} をこの 3 色を用いて塗り分ければよい．この塗り方は

$$\underset{色}{{}_4\mathrm{C}_3} \times 3! = 4 \times 3 \cdot 2 \text{ 通り}$$

ある．

(ii) 立方体の 6 面をちょうど 4 色で $(*)$ を満たすように塗り分けるには，向かい合う 2 つの面の組がそれぞれ同じ色となり，残りの向かい合う 2 面が異なる色を塗ればよい．同じ色を塗る組の決め方は ${}_3\mathrm{C}_2$ 通りあるから

$$\underset{2\text{ つの組}}{{}_3\mathrm{C}_2} \times 4! = 3 \times 4 \cdot 3 \cdot 2 \text{ 通り}$$

ある．

(i)(ii) より，求める確率 p_4 は

$$p_4 = \frac{4 \times 3 \cdot 2 + 3 \times 4 \cdot 3 \cdot 2}{4^6} = \frac{(1+3)4 \cdot 3 \cdot 2}{4^6} = \frac{3}{4^3 \cdot 2} = \boldsymbol{\frac{3}{128}} \quad \cdots\cdots(\text{答})$$

である．

(2) $n \to \infty$ より $n \geqq 6$ としてよい．

立方体の 6 面を n 色で塗り分ける方法は n^6 通りあり，これらは同様に確からしい．

このうち，$(*)$ を満たすことができるのは 3 色，4 色，5 色，または 6 色を用いるときである．

(1) と同じように考えると

$$p_n = \frac{1}{n^6}\{\underset{色}{{}_n\mathrm{C}_3} \times 3! + \underset{色}{{}_n\mathrm{C}_4} \times \underset{2\text{ つの組}}{{}_3\mathrm{C}_2} \times 4! + \underset{色}{{}_n\mathrm{C}_5} \times \underset{1\text{ つの組}}{{}_3\mathrm{C}_1} \times 5! + \underset{色}{{}_n\mathrm{C}_6} \times 6!\}$$

$$= \frac{(n\text{ の 5 次以下の式})}{n^6} + \frac{{}_n\mathrm{C}_6 \times 6!}{n^6}$$

ここで

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(n\text{ の 5 次以下の式})}{n^6}=0,$$

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\frac{{}_n\mathrm{C}_5\times 6!}{n^6} &= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^6}\left\{\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)}{6!}\times 6!\right\}\\ &= \lim_{n\to\infty}\left\{1\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\left(1-\frac{3}{n}\right)\left(1-\frac{4}{n}\right)\left(1-\frac{5}{n}\right)\right\}\\ &= 1\end{aligned}$$

であるから

$$\lim_{n\to\infty}p_n=\mathbf{1}$$ ……(答)

である．

- (6 色を用いて塗り分けるときの確率) $\leqq p_n \leqq 1$ であり

$$\begin{aligned}&(6\text{ 色を用いて塗り分けるときの確率})\\ &=\frac{{}_n\mathrm{C}_6\times 6!}{n^6}\\ &=\frac{1}{n^6}\left\{\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)}{6!}\times 6!\right\}\\ &=1\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\left(1-\frac{3}{n}\right)\left(1-\frac{4}{n}\right)\left(1-\frac{5}{n}\right)\\ &\underset{(n\to\infty)}{\longrightarrow}1\end{aligned}$$

である．はさみうちの原理により

$$\lim_{n\to\infty}p_n=1$$

である．