n を 3 以上の整数とする．座標平面上の $2n$ 個の点からなる集合

$$\{(x,\ y)\,|\,x=1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ n,\quad y=1,\ 2\}$$

を考える．この集合から異なる 3 点を無作為に選び，その 3 点を線分で結んで得られる図形の面積を X とする．ただし，3 点が同一直線上にあるときは $X=0$ とする．

(1) k が 0 以上の整数のとき，X が $\dfrac{k}{2}$ となる確率 p_k を n と k の式で表せ．

(2) X が $\dfrac{n}{4}$ 以下となる確率を q_n とおく．$\displaystyle\lim_{n\to\infty} q_n$ を求めよ．

(24 千葉大 5)

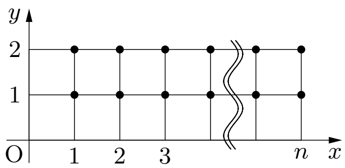
【答】

(1) $p_k=\begin{cases}\dfrac{n-2}{2(2n-1)} & (k=0\ のとき)\\ \dfrac{3(n-k)}{(2n-1)(n-1)} & (k=1,\ 2,\ \cdots,\ n-1\ のとき)\\ 0 & (n\leqq k\ のとき)\end{cases}$

(2) $\dfrac{13}{16}$

【解答】

(1) $2n$ $(n\geqq 3)$ 個の点から 3 点を選ぶときの選び方は



$$ {}_{2n}\mathrm{C}_3=\frac{2n\cdot(2n-1)\cdot(2n-2)}{3\cdot2\cdot1} =\frac{2n(2n-1)(n-1)}{3}\quad 通り$$

であり，これらは同様に確からしい．

$$A_1=\{(x,\ 1)\,|\,x=1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ n\}$$
$$A_2=\{(x,\ 2)\,|\,x=1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ n\}$$

とおくと，k が 0 以上の整数のとき，異なる 3 点を線分で結んで得られる図形の面積 X は

(i) 3 点が A_1 にある，または 3 点が A_2 にあるときは，3 点が同一直線上にあるから，$X=0$ である．

(ii) 2 点が A_1 にあり他の 1 点が A_2 にある，または 2 点が A_2 にあり他の 1 点が A_1 にあるとき，同じ集合にある 2 点の x 座標の差を k とおき，これを三角形の底辺の長さをみると，高さは 1 であるから $X=\dfrac{1}{2}\cdot k\cdot 1=\dfrac{k}{2}$ $(k=1,\ 2,\ \cdots,\ n-1)$ である．

(iii) $k\geqq n$ のとき，(ii) と同じく考えると，可能な底辺の長さ k は $1\leqq k\leqq n-1$ であり，これは $k\geqq n$ に反する．すなわち，$k\geqq n$ となる三角形は存在しない．

と場合分けされる．$X=\dfrac{k}{2}$ となる確率 p_k は

(i) $k=0$ のとき，$X=0$ であり

$$p_0=\frac{{}_n\mathrm{C}_3+{}_n\mathrm{C}_3}{\dfrac{2n\cdot(2n-1)\cdot(n-1)}{3}}=\frac{2\times\dfrac{n(n-1)(n-2)}{3\cdot2\cdot1}}{\dfrac{2n\cdot(2n-1)\cdot(n-1)}{3}}=\frac{n-2}{2(2n-1)}$$

である．

(ii) $k=1,\ 2,\ \cdots,\ n-1$ のとき，$X=\dfrac{k}{2}$ であり，同じ集合にある 2 点の x 座標の組 $(x_1,\ x_2)$ は $(1,\ k+1)$, $(2,\ k+2)$, $\cdots$, $(n-k,\ n)$ の $n-k$ 通りがあるから

$$p_k=\frac{(n-k)\cdot{}_n\mathrm{C}_1\times 2}{\dfrac{2n\cdot(2n-1)\cdot(n-1)}{3}}=\frac{3(n-k)n}{n\cdot(2n-1)\cdot(n-1)}=\frac{3(n-k)}{(2n-1)(n-1)}$$

である．

(iii) $n\leqq k$ のとき，三角形は存在しないから

$$p_k=0$$

である．

よって

$$\boldsymbol{p_k=\begin{cases}\dfrac{n-2}{2(2n-1)} & (k=0\ \text{のとき})\\ \dfrac{3(n-k)}{(2n-1)(n-1)} & (k=1,\ 2,\ \cdots,\ n-1\ \text{のとき})\\ 0 & (n\leqq k\ \text{のとき})\end{cases}}\qquad\cdots\cdots(\text{答})$$

である．

(2) (1) より X がとり得る値は 0 ($k=0$ のとき) または $\dfrac{k}{2}$ ($k=1,\ 2,\ \cdots,\ n-1$ のとき) であるから，$X=\dfrac{k}{2}$ ($k=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ n-1$ のとき) と表すことができ，X が $\dfrac{n}{4}$ 以下となるのは

$$0\leqq\frac{k}{2}\leqq\frac{n}{4}\qquad\therefore\quad 0\leqq k\leqq\frac{n}{2}$$

のときである．

(i) n が偶数のとき，$n=2m$ (m は 2 以上の整数) とおくと，$X\leqq\dfrac{n}{4}$ となる k は $k=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ m$ であり，$X\leqq\dfrac{n}{4}$ となる確率 q_n は

$$\begin{aligned}q_n&=q_0+q_1+\cdots+q_m\\&=\frac{n-2}{2(2n-1)}+\sum_{k=1}^{m}\frac{3(n-k)}{(2n-1)(n-1)}\\&=\frac{n-2}{2(2n-1)}+\frac{3}{(2n-1)(n-1)}\cdot\frac{m\{(n-1)+(n-m)\}}{2}\\&=\frac{n-2}{2(2n-1)}+\frac{3}{(2n-1)(n-1)}\cdot\frac{\frac{n}{2}\left(2n-\frac{n}{2}-1\right)}{2}\qquad\left(\because\ m=\frac{n}{2}\right)\\&=\frac{n-2}{2(2n-1)}+\frac{3n(3n-2)}{8(2n-1)(n-1)}\\&=\frac{1-\frac{2}{n}}{2\left(2-\frac{1}{n}\right)}+\frac{3\left(3-\frac{2}{n}\right)}{8\left(2-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{1}{n}\right)}\\&\underset{(n\to\infty)}{\longrightarrow}\frac{1}{2\cdot 2}+\frac{3\cdot 3}{8\cdot 2\cdot 1}\\&=\frac{13}{16}\end{aligned}$$

(ii) n が奇数のとき，$n=2m+1$ (m は 1 以上の整数) とおくと，$X\leqq\dfrac{n}{4}$ となる k は

$k=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ m$ であり，$X \leqq \dfrac{n}{4}$ となる確率 q_n は

$$\begin{aligned}
q_n &= q_0 + q_1 + \cdots + q_m \\
&= \frac{n-2}{2(2n-1)} + \sum_{k=1}^{m} \frac{3(n-k)}{(2n-1)(n-1)} \\
&= \frac{n-2}{2(2n-1)} + \frac{3}{(2n-1)(n-1)} \cdot \frac{m\{(n-1)+(n-m)\}}{2} \\
&= \frac{n-2}{2(2n-1)} + \frac{3}{(2n-1)(n-1)} \cdot \frac{\dfrac{n-1}{2}\left(2n - \dfrac{n-1}{2} - 1\right)}{2} \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \left(\because\ m = \frac{n-1}{2}\right) \\
&= \frac{n-2}{2(2n-1)} + \frac{3(3n-1)}{8(2n-1)} \\
&= \frac{1-\dfrac{2}{n}}{2\left(2-\dfrac{1}{n}\right)} + \frac{3\left(3-\dfrac{1}{n}\right)}{8\left(2-\dfrac{1}{n}\right)} \\
&\underset{(n\to\infty)}{\longrightarrow} \frac{1}{2\cdot 2} + \frac{3\cdot 3}{8\cdot 2} \\
&= \frac{13}{16}
\end{aligned}$$

(i)，(ii) より $\displaystyle\lim_{m\to\infty} q_{2m} = \lim_{m\to\infty} q_{2m+1} = \frac{13}{16}$ であり

$$\lim_{n\to\infty} q_n = \mathbf{\frac{13}{16}} \qquad \cdots\cdots(答)$$

である．