6 個の玉が入っている箱が 1 つある．以下の操作を n 回繰り返した後に箱に入っている玉の個数を a_n とする．

操作：箱から 2 個の玉を取り出す．その後，箱に残っている玉の個数と同じ個数の玉を新たに箱へ入れる．

以下の問いに答えよ．

(1) a_1 を求めよ．
(2) a_{n+1} と a_n の関係式を求めよ．
(3) a_n を n の式で表せ．
(4) a_n が初めて 1000 より大きくなる n の値を求めよ．
(5) 数列 $\{b_n\}$ を $b_n = \dfrac{n}{2^n}$ $(n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ により定めるとき，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} b_n = 0$ を証明せよ．必要ならば，自然数 n に対して $2^n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} {}_n\mathrm{C}_k$ が成り立つことを用いてよい．
(6) 極限 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n}{2^n}$ を求めよ．

(24 豊橋技科大 1)

【答】

(1) 8
(2) $a_{n+1} = 2a_n - 4$
(3) $a_n = 4 + 2^{n+1}$
(4) $n = 9$
(5) 略
(6) 4

【解答】

(1) a_1 は操作を 1 回行った後に箱に入っている玉の個数であるから

$$a_1 = (6-2) + (6-2) = \mathbf{8} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

である．

(2) a_{n+1} は操作を n 回行った後に箱に入っている玉の個数であるから

$$a_{n+1} = (a_n - 2) + (a_n - 2) = 2a_n - 4$$
$$\therefore\ \boldsymbol{a_{n+1} = 2a_n - 4} \qquad \cdots\cdots ① \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

である．

(3) ① は

$$a_{n+1} - 4 = 2(a_n - 4)$$

と変形される．数列 $\{a_n - 4\}$ は初項 $a_1 - 4 = 8 - 4 = 4$ $(\because\ (1))$，公比 2 の等比数列であるから

$$a_n - 4 = 4 \cdot 2^{n-1}$$
$$\therefore\ \boldsymbol{a_n = 4 + 2^{n+1}} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

である．

(4) $\{a_n\}$ は単調増加な数列であるから，a_n が初めて 1000 より大きくなる n は $a_n > 1000$ を満たす最小な n である．

$$4 + 2^{n+1} > 1000$$
$$2^n > \frac{1000-4}{2} = 498$$

$2^8 = 256$，$2^9 = 512$ であるから，求める n の値は

$$\boldsymbol{n = 9} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

である．

(5) $2^n = \sum_{k=0}^{n} {}_n\mathrm{C}_k$ より

$$2^n = {}_n\mathrm{C}_0 + {}_n\mathrm{C}_1 + {}_n\mathrm{C}_2 + \cdots + {}_n\mathrm{C}_n$$
$$2^n > {}_n\mathrm{C}_2 \quad (\because\ {}_n\mathrm{C}_k > 0)$$
$$2^n > \frac{n(n-1)}{2}$$

$n \to \infty$ より $n \geqq 2$ としてよいから

$$0 < \frac{n}{2^n} < \frac{2}{n-1} \underset{(n\to\infty)}{\longrightarrow} 0$$

はさみうちの原理より

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{2^n} = 0 \qquad \cdots\cdots(\text{証明終わり})$$

である．

(6) (3) より

$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n$$
$$= \sum_{k=1}^{n} (4 + 2^{k+1}) = 4n + \frac{4(2^n - 1)}{2-1} = 4n + 4(2^n - 1)$$

であるから

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n}{2^n}$$
$$= \lim_{n\to\infty} \frac{4n + 4(2^n - 1)}{2^n}$$
$$= \lim_{n\to\infty} \left\{ 4 \cdot \frac{n}{2^n} + 4\left(1 - \frac{1}{2^n}\right) \right\}$$
$$= \boldsymbol{4} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

である．