半径 1，中心 O の円 C がある．2 つの円 C_1 と C_2 が次の 2 つの条件を満たすとする．

- C_1 と C_2 はどちらも C に内接する．
- C_1 と C_2 は互いに外接する．

円 C_1，C_2 の中心をそれぞれ D，E とし，半径をそれぞれ p, q とする．$\theta = \angle\mathrm{DOE}$ とおく．以下の問いに答えよ．

(1) q を p と θ を用いて表せ．
(2) p を固定する．θ が 0 に近づくとき，$\dfrac{q}{\theta^2}$ の極限値を求めよ．

さらに，円 C_3 が次の 2 つの条件を満たすとする．

- C_3 と C_1 は半径が等しい．
- C_3 は C に内接し，C_1，C_2 のどちらとも外接する．

このとき以下の問いに答えよ．

(3) $p = \sqrt{2} - 1$ のとき，q の値を求めよ．
(4) θ が 0 に近づくとき，$\dfrac{q}{p}$ の極限値を求めよ．

(24 千葉大 8)

【答】

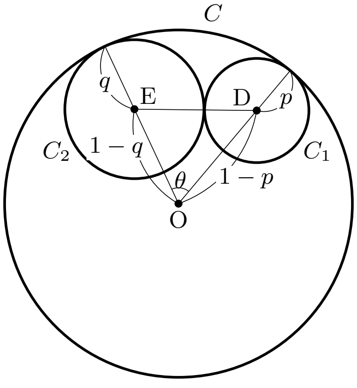
(1) $q = \dfrac{(1-p)(1-\cos\theta)}{1+p-(1-p)\cos\theta}$

(2) $\displaystyle\lim_{\theta\to 0}\frac{q}{\theta^2} = \frac{1-p}{4p}$

(3) $q = 3 - 2\sqrt{2},\ \dfrac{2\sqrt{2}+1}{7}$

(4) $\displaystyle\lim_{\theta\to 0}\frac{q}{p} = \frac{1}{4}$

【解答】



(1) 3 つの円 C(中心 O, 半径 1)，C_1(中心 D, 半径 p)，C_2(中心 E, 半径 q) は 2 つの条件

- C_1 と C_2 はどちらも C に内接する．
- C_1 と C_2 は互いに外接する．

を満たす．

2 円が内接する $\iff$ (中心間の距離) = | 半径の差 |

2 円が外接する $\iff$ (中心間の距離) = (半径の和)

であるから

$\mathrm{OD} = 1-p,\quad \mathrm{OE} = 1-q,\quad \mathrm{DE} = p+q$

を満たす．$\theta = \angle\mathrm{DOE}$ であるから，$\triangle\mathrm{ODE}$ で余弦定理を用いると

$$\mathrm{DE}^2 = \mathrm{OD}^2 + \mathrm{OE}^2 - 2\mathrm{OD}\cdot\mathrm{OE}\cos\theta$$
$$(p+q)^2 = (1-p)^2 + (1-q)^2 - 2(1-p)(1-q)\cos\theta$$
$$2pq = (1-2p) + (1-2q) - 2(1-p)\cos\theta + 2(1-p)q\cos\theta$$
$$\{p+1-(1-p)\cos\theta\}q = 1-p-(1-p)\cos\theta$$
$$\{1+p-(1-p)\cos\theta\}q = (1-p)(1-\cos\theta)$$

C_1 は C に内接するから $p<1$ であり，$1+p-(1-p)\cos\theta \fallingdotseq 0$ であるから

$$\boldsymbol{q=\frac{(1-p)(1-\cos\theta)}{1+p-(1-p)\cos\theta}} \qquad \cdots\cdots ① \qquad \cdots\cdots(答)$$

である．

(2) p を固定する．(1) の結果より

$$\begin{aligned}\lim_{\theta\to 0}\frac{q}{\theta^2} &= \lim_{\theta\to 0}\frac{(1-p)\sin^2\theta}{\{1+p-(1-p)\cos\theta\}(1+\cos\theta)\theta^2}\\ &= \lim_{\theta\to 0}\left\{\frac{1-p}{\{1+p-(1-p)\cos\theta\}(1+\cos\theta)}\cdot\left(\frac{\sin\theta}{\theta}\right)^2\right\}\\ &= \frac{1-p}{\{1+p-(1-p)\}\cdot 2}\cdot 1^2\\ &= \boldsymbol{\frac{1-p}{4p}} \qquad \cdots\cdots(答)\end{aligned}$$

である．

(3) さらに，C_3 は次の 2 つの条件

- C_3 と C_1 は半径が等しい．
- C_3 は C に内接し，C_1，C_2 のどちらとも外接する．

を満たし，$p=\sqrt{2}-1$ であるから，円 C_3 の中心を F，半径を r とおくと

$$r=p=\sqrt{2}-1$$

$$\mathrm{OF}=1-r=1-(\sqrt{2}-1)=2-\sqrt{2}$$

$$\mathrm{DF}=p+r=2r=2\sqrt{2}-2$$

$$\mathrm{EF}=q+r=q+\sqrt{2}-1$$

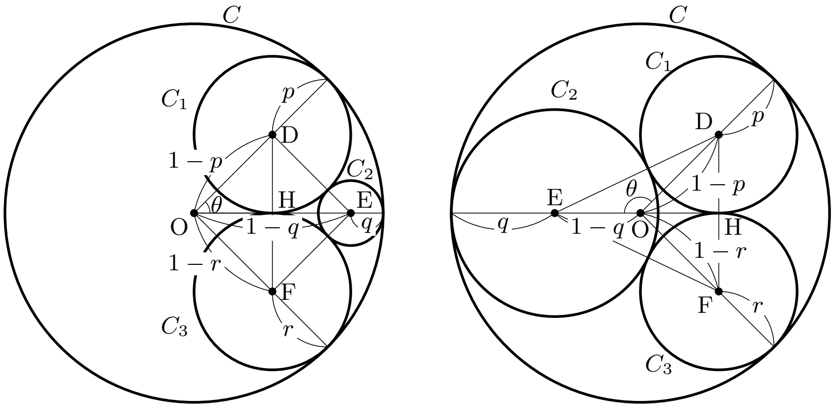
であり

$$\mathrm{OD}:\mathrm{OF}:\mathrm{DF}=(2-\sqrt{2}):(2-\sqrt{2}):(2\sqrt{2}-2)=1:1:\sqrt{2}$$

であるから，$\triangle\mathrm{ODF}$ は $\angle\mathrm{DOF}=\dfrac{\pi}{2}$ の直角二等辺三角形である．このとき

$$\theta=\frac{\pi}{4} \text{ または } \frac{3}{4}\pi$$

である．



$p=\sqrt{2}-1$ を ① に代入すると

$\theta=\dfrac{\pi}{4}$ のとき

$$q=\frac{(2-\sqrt{2})\left(1-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)}{\sqrt{2}-\left(2-\sqrt{2}\right)\dfrac{\sqrt{2}}{2}}=\frac{(2-\sqrt{2})^2}{2\sqrt{2}-(2-\sqrt{2})\sqrt{2}}=\frac{2(\sqrt{2}-1)^2}{2}=3-2\sqrt{2}$$

$\theta = \dfrac{3}{4}\pi$ のとき

$$q = \frac{(2-\sqrt{2})\left(1+\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)}{\sqrt{2}-(2-\sqrt{2})\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)} = \frac{2^2-2}{2\sqrt{2}+(2-\sqrt{2})\sqrt{2}} = \frac{1}{2\sqrt{2}-1} = \frac{2\sqrt{2}+1}{7}$$

である．よって，q の値は

$$\boldsymbol{q = 3-2\sqrt{2},\ \frac{2\sqrt{2}+1}{7}} \qquad \cdots\cdots(答)$$

である．

(4) C_1 と C_3 の接点を H とおくと

$$\mathrm{DH} = \mathrm{OD}\sin\angle\mathrm{DOH}$$

である．$\mathrm{DH} = p$, $\mathrm{OD} = 1-p$，また $\angle\mathrm{DOH} = \theta$ または $\pi-\theta$ であるから $\sin\angle\mathrm{DOH} = \sin\theta$ であり

$$p = (1-p)\sin\theta \qquad \therefore\quad p = \frac{\sin\theta}{1+\sin\theta}$$

である．このとき，① は

$$\begin{aligned} q &= \frac{\left(1-\dfrac{\sin\theta}{1+\sin\theta}\right)(1-\cos\theta)}{1+\dfrac{\sin\theta}{1+\sin\theta}-\left(1-\dfrac{\sin\theta}{1+\sin\theta}\right)\cos\theta} \\ &= \frac{1-\cos\theta}{(1+\sin\theta)+\sin\theta-\cos\theta} \\ &= \frac{1-\cos\theta}{1+2\sin\theta-\cos\theta} \end{aligned}$$

であるから

$$\begin{aligned} \lim_{\theta\to0}\frac{q}{p} &= \lim_{\theta\to0}\left(\frac{1-\cos\theta}{1+2\sin\theta-\cos\theta}\cdot\frac{1+\sin\theta}{\sin\theta}\right) \\ &= \lim_{\theta\to0}\frac{(1-\cos\theta)(1+\cos\theta)(1+\sin\theta)}{(1-\cos\theta+2\sin\theta)(1+\cos\theta)\sin\theta} \\ &= \lim_{\theta\to0}\frac{\sin^2\theta(1+\sin\theta)}{\{\sin^2\theta+2\sin\theta(1+\cos\theta)\}\sin\theta} \\ &= \lim_{\theta\to0}\frac{1+\sin\theta}{\sin\theta+2(1+\cos\theta)} \\ &= \boldsymbol{\frac{1}{4}} \end{aligned} \qquad \cdots\cdots(答)$$

である．