

$y = x^{\frac{1}{x^2}}$ について $x = e$ における微分係数を求めなさい. e は自然対数の底とする.
(24 公立千歳科技大 中期 理工 1(2))

【答】 $-e^{\frac{1}{e^2}-3}$

【解答】

$x = e$ における微分係数を考えるから $x > 0$ としてよい. $y = x^{\frac{1}{x^2}}$ の辺々の対数をとると

$$\log y = \frac{1}{x^2} \log x$$

辺々微分すると

$$\begin{aligned} \frac{1}{y} y' &= \frac{\frac{1}{x} \cdot x^2 - \log x \cdot (2x)}{x^4} \\ \therefore y' &= x^{\frac{1}{x^2}} \cdot \frac{1 - 2 \log x}{x^3} \end{aligned}$$

よって

$$\begin{aligned} y'_{(x=e)} &= e^{\frac{1}{e^2}} \frac{1 - 2 \log e}{e^3} \\ &= -e^{\frac{1}{e^2}} e^{-3} \\ &= -e^{\frac{1}{e^2}-3} \end{aligned} \quad \dots\dots(\text{答})$$

である.