$e$ を自然対数の底として，$y=e^{ax}\cos x$ が $x$ についての恒等式 $y''-4y'+5y=0$ を満たすとき，定数 $a$ の値を求めなさい.

(24 公立千歳科技大 中期 理工 1(6))

---

【答】 $a=2$

---

【解答】

$$y=e^{ax}\cos x$$

$$\begin{aligned} y' &= ae^{ax}\cos x+e^{ax}(-\sin x) \\ &= e^{ax}(a\cos x-\sin x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y'' &= ae^{ax}(a\cos x-\sin x)+e^{ax}(-a\sin x-\cos x) \\ &= e^{ax}\{(a^2-1)\cos x-2a\sin x\} \end{aligned}$$

であるから，$y=e^{ax}\cos x$ が $y''-4y'+5y=0$ を満たすとき

$$e^{ax}\{(a^2-1)\cos x-2a\sin x\}-4e^{ax}(a\cos x-\sin x)+5e^{ax}\cos x=0$$

$e^{ax}>0$ であり $e^{ax}\fallingdotseq 0$ であるから

$$\begin{aligned} &\{(a^2-1)\cos x-2a\sin x\}-4(a\cos x-\sin x)+5\cos x=0 \\ &(a^2-4a+4)\cos x-(2a-4)\sin x=0 \\ \therefore\quad &(a-2)^2\cos x-2(a-2)\sin x=0 \qquad \cdots\cdots ① \end{aligned}$$

① は $x$ についての恒等式であるから，$x=0$ のとき

$$(a-2)^2\cdot 1-2(a-2)\cdot 0=0 \qquad \therefore\quad a=2$$

であることが必要である.

逆に，$a=2$ ならば

$$(①\text{の左辺})=0^2\cos x-2\cdot 0\sin x=0$$

であり，任意の $x$ に対して ① は成り立つ (十分).

よって，求める $a$ の値は

$$\boldsymbol{a=2} \qquad \cdots\cdots(答)$$

である.