自然数 n，および $a \neq 0$ かつ $a \neq -1$ を満たす定数 a に対し，関数 $f(x)$ を

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{x^{2n-1}\sin\frac{\pi}{2}x - \cos\pi x}{x^{2n}+a}$$

により定めるとき，関数 $f(x)$ がすべての実数 x で連続となるような a の値を求めよ．

(24 鳥取大 後 3)

【答】 $a = 1$

【解答】

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{x^{2n-1}\sin\frac{\pi}{2}x - \cos\pi x}{x^{2n}+a}$$

$\lim\limits_{n\to} x^{2n-1}$，$\lim\limits_{n\to} x^{2n}$ の収束，発散に注意して x の範囲を場合分けする．

(i) $-1 < x < 1$ のとき，$\lim\limits_{n\to\infty} x^{2n-1} = \lim\limits_{n\to\infty} x^{2n} = 0$ であるから

$$f(x) = \frac{0-\cos\pi x}{0+a} = -\frac{1}{a}\cos\pi x \quad (\because\ a \neq 0)$$

であり，$f(x)$ は連続である．

(ii) $|x| > 1$ のとき，$\lim\limits_{n\to} x^{2n} = \infty$ であるから

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{x}\sin\frac{\pi}{2}x - \frac{\cos\pi x}{x^{2n}}}{1+\frac{a}{x^{2n}}} = \frac{1}{x}\sin\frac{\pi}{2}x$$

であり，$f(x)$ は連続である．

(iii) $x = 1$ のとき

$$f(1) = \lim_{n\to\infty} \frac{1^{2n-1}\cdot\sin\frac{\pi}{2} - \cos\pi}{1^{2n}+a} = \frac{1-(-1)}{1+a} = \frac{2}{1+a} \quad (\because\ a \neq -1)$$

(iv) $x = -1$ のとき

$$\begin{aligned} f(-1) &= \lim_{n\to\infty} \frac{(-1)^{2n-1}\cdot\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) - \cos(-\pi)}{(-1)^{2n}+a} \\ &= \frac{-(-1)-(-1)}{1+a} = \frac{2}{1+a} \quad (\because\ a \neq -1) \end{aligned}$$

$x = -1$ で $f(x)$ が連続である条件は

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to-1-0} \frac{1}{x}\sin\frac{\pi}{2}x = \frac{2}{1+a} \\ \lim\limits_{x\to1+0} -\frac{1}{a}\cos\pi x = \frac{2}{1+a} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{1}{-1}(-1) = \frac{2}{1+a} \\ -\frac{1}{a}(-1) = \frac{2}{1+a} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 1 = \frac{2}{1+a} \\ \frac{1}{a} = \frac{2}{1+a} \end{cases}$$

$\therefore\quad a = 1$ (これは 2 式を満たす)

$a=1$ のとき $f(1)=\dfrac{2}{1+1}=1$ である．また

$$\lim_{x\to 1-0} f(x) = -\frac{1}{1}\cos\pi = -(-1) = 1$$

$$\lim_{x\to 1+0} f(x) = \frac{1}{1}\sin\frac{\pi}{2} = 1$$

であり，$\displaystyle\lim_{x\to 1-0} f(x) = f(1) = \lim_{x\to 1+0} f(x)$ を満たすから，$f(x)$ は $x=1$ でも連続である．

以上より，$f(x)$ がすべての実数 x で連続となるような a の値は

$$\boldsymbol{a=1} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

である．