関数 $f(x)$, $g(x)$ をそれぞれ

$$f(x)=\frac{3}{2}x^2+x-2\sqrt{4x^2+3}\quad (x>0)$$
$$g(x)=x^2+x$$

と定める．次の問いに答えよ．

(1) a は正の実数とする．曲線 $y=f(x)$ 上の点 $(a,\ f(a))$ における接線の y 切片を a を用いて表せ．

(2) b は実数とし，曲線 $y=g(x)$ 上の点 $(b,\ g(b))$ における接線を ℓ とする．曲線 $y=f(x)$ の接線で，ℓ と垂直に交わるものが存在するように，定数 b の値の範囲を定めよ．

(24 東京農工大 農・工 3)

【答】

(1) $-\dfrac{3}{2}a^2-\dfrac{6}{\sqrt{4a^2+3}}$

(2) $-\dfrac{3}{2}\leqq b<-\dfrac{1}{2}$

【解答】

$$f(x)=\frac{3}{2}x^2+x-2\sqrt{4x^2+3}\quad (x>0)$$
$$g(x)=x^2+x$$

(1) $$f'(x)=3x+1-\frac{8x}{\sqrt{4x^2+3}}$$

曲線 $y=f(x)$ 上の点 $(a,\ f(a))$ における接線の方程式は

$$y=\left(3a+1-\frac{8a}{\sqrt{4a^2+3}}\right)(x-a)+\frac{3}{2}a^2+a-2\sqrt{4a^2+3}$$
$$\therefore\quad y=\left(3a+1-\frac{8a}{\sqrt{4a^2+3}}\right)x-\frac{3}{2}a^2-\frac{6}{\sqrt{4a^2+3}}$$

であり，この接線の y 切片は

$$\boldsymbol{-\frac{3}{2}a^2-\frac{6}{\sqrt{4a^2+3}}}\qquad\cdots\cdots(\text{答})$$

である．

(2) $$g'(x)=2x+1$$

曲線 $y=g(x)$ 上の点 $(b,\ g(b))$ における接線 ℓ の傾きは

$$2b+1$$

であるから，曲線 $y=f(x)$ の接線で，ℓ と垂直に交わるものが存在する条件は

$$f'(a)\cdot g'(b)=-1\qquad\cdots\cdots\ (*)$$

を満たす実数 $a\ (>0)$, b が存在することである．

$$(*)\iff\left(3a+1-\frac{8a}{\sqrt{4a^2+3}}\right)(2b+1)=-1$$
$$\iff 3a+1-\frac{8a}{\sqrt{4a^2+3}}=-\frac{1}{2b+1}$$

$h(a) = 3a + 1 - \dfrac{8a}{\sqrt{4a^2+3}}$ $(a > 0)$ とおく．

$$h'(a) = 3 - \frac{8 \cdot \sqrt{4a^2+3} - 8a \cdot \dfrac{4a}{\sqrt{4a^2+3}}}{4a^2+3}$$
$$= 3 - \frac{8(4a^2+3) - 32a^2}{(4a^2+3)^{\frac{3}{2}}}$$
$$= 3 - \frac{24}{(4a^2+3)^{\frac{3}{2}}}$$
$$= 3 \cdot \frac{(4a^2+3)^{\frac{3}{2}} - 8}{(4a^2+3)^{\frac{3}{2}}}$$

$h'(a) = 0$ の符号が変わるのは

$$(4a^2+3)^{\frac{3}{2}} = 8 \qquad \therefore \quad \sqrt{4a^2+3} = 2 \text{ すなわち } a = \frac{1}{2} \ (> 0)$$

のときである．$h(a)$ の増減は下表のようになる．

a	(0)	$\cdots$	$\frac{1}{2}$	$\cdots$
$h'(a)$	(0)	$-$	0	$+$
$h(a)$		$\searrow$	$\frac{1}{2}$	$\nearrow$

$$\lim_{a \to +0} h(a) = 1,$$
$$\lim_{a \to \infty} h(a) = \lim_{a \to \infty} \left(3a + 1 - \frac{8}{\sqrt{4 + \dfrac{3}{a^2}}} \right) = \infty$$

であることもあわせると，$h(a)$ のとりうる値の範囲は

$$h(a) \geqq \frac{1}{2}$$

となる．これより，定数 b の値の範囲は

$$-\frac{1}{2b+1} \geqq \frac{1}{2} \qquad \cdots\cdots (*)$$

である．$(*)$ を変形すると

$$(*) \iff 0 < -(2b+1) \leqq 2$$
$$\iff -3 \leqq 2b < -1$$
$$\therefore \quad \boldsymbol{-\frac{3}{2} \leqq b < -\frac{1}{2}} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

である．