以下の問いに答えなさい．ただし，$e$ は自然対数の底とする．解答欄には計算過程も書きなさい．

(1) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{e^x}=0$ であることを用いて $\displaystyle\lim_{y\to+\infty}\frac{\log y}{y}=0$ であることを証明しなさい．

(2) $\displaystyle\lim_{x\to+0}x\log x=0$ であることを証明しなさい．

(3) $y=x\log|x|$ のグラフをかきなさい．また，変曲点の有無を明記し，変曲点がある場合はその座標を記しなさい．

(24 公立千歳科技大 中期 理工 3)

---

【答】

(1) 略

(2) 略

(3) グラフは略，変曲点はない．

---

【解答】

(1) $y\to+\infty$ より $y=e^x$ とおくと，$x=\log y$ であり $x\to+\infty$ であるから

$$\lim_{y\to+\infty}\frac{\log y}{y}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{e^x}=0 \qquad \cdots\cdots(\text{証明終わり})$$

である．

(2) $x\to+0$ より $x=\dfrac{1}{t}$ とおくと，$t=\dfrac{1}{x}$ であり $t\to+\infty$ であるから

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+0}x\log x&=\lim_{t\to+\infty}\left(\frac{1}{t}\log\frac{1}{t}\right)=-\lim_{t\to+\infty}\frac{\log t}{t}\\&=0\quad(\because\ (1))\end{aligned} \qquad \cdots\cdots(\text{証明終わり})$$

である．

(3) $y=x\log|x|$ の定義域は $x\neq0$ である．

$y=x\log|x|$ は奇関数でありグラフは原点に関して対称である．

$x>0$ での増減を調べる．

$$y=x\log x\ (x>0)$$

$$y'=1\cdot\log x+x\cdot\frac{1}{x}=1+\log x$$

$$y''=\frac{1}{x}$$

| $x$ | $(0)$ | $\cdots$ | $\frac{1}{e}$ | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|
| $y'$ | | $-$ | $0$ | $+$ |
| $y''$ | | $+$ | $+$ | $+$ |
| $y$ | $(0)$ | ↘ | $-\frac{1}{e}$ | ↗ |

$y$ の増減，凹凸は右表となる．

$y=x\log|x|$ のグラフは，原点に関して対称であることに注意すると，下図となる．

また，$x=0$ を境に $y''$ の符号は変化するが，$x\neq0$ であるから変曲点は存在しない．