

関数 $f(x) = \frac{e^x}{x}$ について以下の問いに答えなさい。ただし、 e は自然対数の底とし、 $f(x)$ に関する極限は証明せずに用いてよい。解答欄には途中の計算過程も書きなさい。

- (1) $y = f(x)$ の増減表をかきなさい。
- (2) $y = f(x)$ のグラフの概形をかきなさい。

(24 公立千歳科技大 理工 3)

【答】

- (1) 略
- (2) 略

【解答】

$$f(x) = \frac{e^x}{x}$$

- (1) $f(x)$ の定義域は $x \neq 0$ を満たす実数全体である。
 $f'(x)$ を微分すると

$$f'(x) = \frac{e^x \cdot x - e^x \cdot 1}{x^2} = \frac{(x-1)e^x}{x^2}$$

$f(x)$ の増減表は右のようになる。

- (2) $f(x)$ の極限について

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0,$$

$$\lim_{x \rightarrow -0} f(x) = -\infty,$$

$$\lim_{x \rightarrow +0} f(x) = \infty$$

また、「 $x > 0$ のとき $e^x \geq 1 + x + \frac{x^2}{2}$ 」…… (*)
が成り立つことから

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{x} + 1 + \frac{x}{2} \right) = \infty$$

であり、 $y = f(x)$ のグラフは右図となる。

- (*) は教科書の例題として扱っている不等式である。本来は (*) を証明して用いるべきだが、「極限は証明せずに用いてよい」とあるので、本問の解答では、(*) を用いたことも示さず結果のみを示すだけでよいだろう。

x	...	0	...	1	...
$f'(x)$	-	/	-	0	+
$f(x)$	↘	/	↘	e	↗

