a が実数であるとき，次の関数 $f(x)$ について，以下の問いに答えなさい．

$$f(x)=\cos x-\frac{1}{4}\sin 2x-ax \quad (-\pi \leqq x \leqq \pi)$$

(1) 曲線 $y=f(x)$ 上の点 $(0,\ f(0))$ における接線の傾きが $-\dfrac{3}{4}$ であるとき，次の設問に答えなさい．

(i) a の値を求めなさい．

(ii) $f(x)$ の極値を求めなさい．

(2) $f(x)$ が極値をもつ a の値の範囲を求めなさい．

(24 岩手県大 ソフト情 4)

【答】

(1) (i) $a=\dfrac{1}{4}$ (ii) 極小値 $f\left(-\dfrac{5}{6}\pi\right)=\dfrac{5}{24}\pi-\dfrac{5\sqrt{3}}{8}$，極大値 $f\left(-\dfrac{\pi}{6}\right)=\dfrac{\pi}{24}+\dfrac{5\sqrt{3}}{8}$

(2) $-\dfrac{3}{4}<a<\dfrac{3}{2}$

【解答】

$$f(x)=\cos x-\frac{1}{4}\sin 2x-ax \quad (-\pi \leqq x \leqq \pi)$$

(1) (i) $f(x)$ を微分すると

$$f'(x)=-\sin x-\frac{1}{2}\cos 2x-a$$

である．曲線 $y=f(x)$ 上の点 $(0,\ f(0))$ における接線の傾きが $-\dfrac{3}{4}$ であるとき

$$f'(0)=-\frac{3}{4}$$

$$0-\frac{1}{2}-a=-\frac{3}{4} \qquad \therefore\quad \boldsymbol{a=\frac{1}{4}}$$ ……(答)

である．

(ii) $a=\dfrac{1}{4}$ のとき，$f'(x)$ を $\sin x$ で表すと

$$\begin{aligned} f'(x)&=-\sin x-\frac{1}{2}(1-2\sin^2 x)-\frac{1}{4}\\ &=\sin^2 x-\sin x-\frac{3}{4}\\ &=\left(\sin x+\frac{1}{2}\right)\left(\sin x-\frac{3}{2}\right)\end{aligned}$$

である．$\sin x-\dfrac{3}{2}<0$ に注意すると，$-\pi \leqq x \leqq \pi$ における $f(x)$ の増減は下表となる．

x	$-\pi$	$\cdots$	$-\frac{5}{6}\pi$	$\cdots$	$-\frac{\pi}{6}$	$\cdots$	π
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$		$\searrow$	極小	$\nearrow$	極大	$\searrow$	

したがって，$f(x)$ は

$x=-\dfrac{5}{6}\pi$ のとき，極小値 $f\left(-\dfrac{5}{6}\pi\right)=\boldsymbol{\dfrac{5}{24}\pi-\dfrac{5\sqrt{3}}{8}}$， ……(答)

$x=-\dfrac{\pi}{6}$ のとき， 極大値 $f\left(-\dfrac{\pi}{6}\right)=\boldsymbol{\dfrac{\pi}{24}+\dfrac{5\sqrt{3}}{8}}$ ……(答)

をとる．

(2) $f'(x)$ を $\sin x$ で表すと

$$f'(x) = \sin^2 x - \sin x - a - \frac{1}{2}$$

である．$f(x)$ が極値をもつ条件は

$f'(x)$ の符号が変化する x が存在する

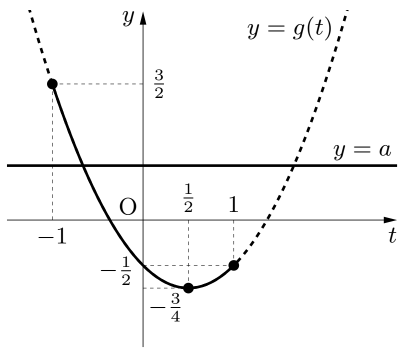
ことであり，$t = \sin x$ とおくと

$t^2 - t - \frac{1}{2} - a$ の符号が変化する t が $-1 \leqq t \leqq 1$ に存在する

ことである．$g(t) = t^2 - t - \frac{1}{2}$ とおき，$y = g(t)$ と $y = a$ のグラフを調べる．

$$g(t) = \left(t - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{3}{4}$$

より，$y = g(t)$ $(-1 \leqq t \leqq 1)$ のグラフは右図となる．



$y = g(t)$ と $y = a$ のグラフの上下が変化するとき $g(t) - a$ の符号，すなわち $f'(x) - a$ の符号も変化するから，求める a の値の範囲は

$$\boldsymbol{-\frac{3}{4} < a < \frac{3}{2}} \qquad \cdots\cdots(答)$$

である．