自然数 n に対して，関数 $f_n(x)$ を

$$f_n(x) = 1 - \frac{1}{2}e^{nx} + \cos\frac{x}{3} \qquad (x \geqq 0)$$

で定める．ただし，e は自然対数の底である．

(1) 方程式 $f_n(x) = 0$ は，ただ 1 つの実数解をもつことを示せ．
(2) (1) における実数解を a_n とおくとき，極限値 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n$ を求めよ．
(3) 極限値 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} na_n$ を求めよ．

(24 大阪大 理系 1)

【答】
(1) 略
(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = 0$
(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} na_n = \log 4$

【解答】

$$f_n(x) = 1 - \frac{1}{2}e^{nx} + \cos\frac{x}{3} \qquad (x \geqq 0)$$

(1) $f_n(x)$ の増減を調べる．

$$\begin{aligned} {f_n}'(x) &= -\frac{n}{2}e^{nx} - \frac{1}{3}\sin\frac{x}{3} \\ &\leqq -\frac{n}{2}e^{0} - \frac{1}{3}\cdot(-1) \quad (\because\ x \geqq 0,\ n > 0) \\ &\leqq -\frac{1}{2} + \frac{1}{3} \quad (\because\ n \text{ は自然数}) \\ &< 0 \end{aligned}$$

$f_n(x)$ は $x \geqq 0$ で単調減少な連続関数であり

$$f(0) = 1 - \frac{1}{2}e^{0} + 1 = \frac{3}{2}$$

$$f_n(x) \leqq 1 - \frac{1}{2}e^{nx} + 1 = 2 - \frac{1}{2}e^{nx} \underset{(n\to\infty)}{\longrightarrow} -\infty$$

であるから，方程式 $f_n(x) = 0$ はただ 1 つの実数解をもつ． ……(証明終わり)

(2) a_n は $f_n(x) = 0$ の解であり

$$1 - \frac{1}{2}e^{na_n} + \cos\frac{a_n}{3} = 0 \qquad (a_n > 0)$$

を満たす．

$$\frac{1}{2}e^{na_n} = 1 + \cos\frac{a_n}{3} \leqq 1 + 1$$

$$\therefore\quad e^{na_n} \leqq 4$$

$e^{na_n} > 0$ であるから

$$na_n \leqq \log 4$$

$$\therefore\quad 0 < a_n \leqq \frac{\log 4}{n} \underset{(n\to\infty)}{\longrightarrow} 0$$

はさみうちの原理により

$$\boldsymbol{\lim_{n\to\infty} a_n = 0} \qquad \cdots\cdots ① \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

である．

(3)
$$\frac{1}{2}e^{na_n} = 1 + \cos\frac{a_n}{3}$$
$$e^{na_n} = 2\left(1 + \cos\frac{a_n}{3}\right)$$

$e^{na_n} > 0$ であるから

$$na_n = \log\left\{2\left(1 + \cos\frac{a_n}{3}\right)\right\} \underset{(n\to\infty)}{\longrightarrow} \log 4 \quad (\because\ ①)$$

よって

$$\boldsymbol{\lim_{n\to\infty} na_n = \log 4} \qquad \cdots\cdots（答）$$

である.